УДК 629.113

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО МИКРОПРОФИЛЯ ДОРОГИ ПО ДВУМ КОЛЕЯМ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ МАШИНЫ

И.С. Чабунин, В.И. Щербаков

Представлено решение задачи моделирования с помощью метода формирующего фильтра микропрофиля дорожной поверхности по двум колеям движения транспортной машины. Для практической реализации метода получены дифференциальные уравнения формирующего фильтра наиболее часто встречающихся в литературе типов дорог, среди которых рассмотрены: дорога с ровным булыжным покрытием, дорога с разбитым булыжным покрытием, дорога с асфальтовым покрытием. Проведена проверка адекватности полученных дифференциальных уравнений для алгоритма моделирования микропрофилей путем сопоставления на совместимость корреляционных функций, построенных по смоделированным микропрофилям дороги по двум колеям движения транспортной машины.

Ключевые слова: *микропрофиль дороги, формирующий фильтр, случайный процесс, корреляционная функция, спектральная плотность, математическое моделирование.*

COMPUTER SIMULATION OF RANDOM MICROPROFILE OF ROAD SURFACE FOR TWO LANES OF TRAFFIC TRANSPORT MACHINE

I.S. Chabunin, V.I. Shcherbakov

The article describes the equations modeling using the method of forming filter microprofile road surface for two lanes of traffic machine. For its practical realization amounted to differential equations of shaping filter most commonly encountered in the literature of road types, among which are considered: road with smooth cobblestone pavement, the road with a broken cobblestone pavement, a road with asphalt coating. Conducted a review of the adequacy of the obtained differential equations for the simulation algorithm of microprofiles by matching the compatibility of correlation functions, built on the simulated microprofiles for two lanes of traffic transport machine.

Keywords: *microprofile of road surface, shaping filter, random process, correlation function, spectral density, mathematical modeling.*

Введение

При проектировании транспортной машины практически важной и актуальной задачей является математическое моделирование ее движения по дорогам со случайными неровностями. В результате моделирования получают информацию о колебаниях и динамической нагруженности разрабатываемой машины, которая используется в последующих расчетах долговечности и надежности как отдельных элементов конструкции, так и всей машины в целом. В подавляющем большинстве работ, посвященных исследованию колебаний транспортных машин, исследуются колебания лишь в продольной плоскости, и для описания микропрофиля дорог используется теория одномерных случайных процессов, в которых за переменную координату принимается протяженность пройденного пути. Также предполагается, что описываемый микропрофиль дороги случайный процесс центрированный, стационарный, эргодический и имеет нормальный закон распределения вероятностей высот микронеровностей.

В более полной постановке задачи динамики транспортной машины возникает необходимость в рассмотрении колебаний как в продольной, так и в поперечной плоскостях. Для этого требуется дорожный профиль описывать однородным центрированным случайным двухмерным полем, а внешние кинематические воздействия на транспортную машину моделировать вектором случайных воздействий. Размерность последнего зависит от количества опорных колес транспортной машины. Так, для четырехколесной машины нужно иметь четырехмерный вектор кинематических воздействий, а для описания его вероятностных характеристик вводить соответствующей размерности квадратную матрицу корреляционных моментов или матрицу спектральных плотностей [1].

В случае расчета колебаний транспортной машины со сложной колебательной системой, а также с нелинейными характеристиками ее упругих и демпфирующих элементов, целесообразно использовать численные методы решения дифференциальных уравнений движения. В этом случае необходимо располагать не самими корреляционными функциями микропрофиля дорожного покрытия или выражениями спектральных плотностей, а соответствующим им массивом ординат. Его можно получить с помощью методов численного моделирования, которые подразделяются на точные и приближенные. Точный метод моделирования [2, 3] основан на уравнении типа авторегрессии – скользящее среднее.

Метод лишен методической ошибки, однако подготовительные работы, заключающиеся в расчете необходимых коэффициентов при моделировании, чрезвычайно трудоемки, что существенно затрудняет его применение. Подробное описание моделирования микропрофиля дороги с помощью этого метода содержится в работе [2].

Приближенные методы моделирования имеют некоторую методическую ошибку. Среди них наиболее простым и распространенным является метод формирующего фильтра. Величина методической ошибки стремится к нулю при стремлении к нулю шага интегрирования дифференциального уравнения формирующего фильтра. В монографии [3] приведены без вывода дифференциальные уравнения формирующего фильтра для частных простейших случаев. В диссертации [4] подробно изложено построение импульсной переходной функции фильтра и дана методика формирования случайного процесса с заданным видом корреляционной функции, а также представлены результаты моделирования случайного микропрофиля. В работах [5, 6] приведен подробный вывод дифференциальных уравнений формирующего фильтра для описания микропрофиля дороги с одной колеей движения, которые пригодны для расчета плоской динамической модели автомобиля.

Целью данной работы является моделирование микропрофиля дороги по двум колеям движения транспортного средства с применением двух способов: при помощи матриц корреляционных функций или спектральных плотностей и с использованием формирующего фильтра для получения численных массивов ординат микропрофиля.

Моделирование микропрофиля с помощью корреляционных функций

Ключевым вопросом в расчетах вибронагруженности элементов конструкций транспортных машин при их движении по дорогам со случайными неровностями является определение вероятностных характеристик кинематических воздействий $\vec{f}(t)$, интенсивность которых зависит от профиля пути, описываемого однородным центрированным случайным полем $z = z(x, y)$, скорости движения v, а также от ряда других, не рассматриваемых в данной работе, факторов, например, от сглаживающих свойств деформируемых шин колес.

Представим неровности дороги однородным центрированным случайным полем с корреляционной функцией $K_z(x, y)$, являющейся произведением двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной – координаты по длине x или по ширине y дороги:

$$K_z(x, y) = \sigma_z^2 K_1(x) K_2(y) \quad (1)$$

или соответствующей спектральной плотностью

$$S_z(\theta_1, \theta_2) = \sigma_z^2 S_1(\theta_1) S_2(\theta_2), \quad (2)$$

где σ_z^2 – дисперсия высот неровностей, м^2; x, y – координаты точек микропрофиля в плоскости дороги; z – координата точек микропрофиля по высоте; $K_1(x)$, $S_1(\theta_1)$ – нормированные корреляционная функция и спектральная плотность продольного профиля дороги; $K_2(y)$, $S_2(\theta_2)$ –

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАШИН И СИСТЕМ аналогично для поперечного профиля дороги; θ_1, θ_2 – путевые частоты, м$^{-1}$ ($\theta = 2\pi / l$, где l – длина волны гармонической составляющей поверхности дороги).

Для случая исследования динамики четырехколесной транспортной машины (рис. 1) будем иметь вектор кинематических воздействий $\vec{f}(t)$ в следующем виде:

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t))^{\text{т}}, \tag{3}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ – случайные процессы кинематических воздействий на колеса транспортной машины; t – время; «т» – символ операции транспонирования вектора.

Вероятностные характеристики вектора $\vec{f}(t)$ полностью определяются матрицей корреляционных моментов второго порядка [1]

$$\mathbf{K}_{\vec{f}}(\tau) = \begin{bmatrix} K_{f_1f_1}(\tau) & K_{f_1f_2}(\tau) & K_{f_1f_3}(\tau) & K_{f_1f_4}(\tau) \\ K_{f_2f_1}(\tau) & K_{f_2f_2}(\tau) & K_{f_2f_3}(\tau) & K_{f_2f_4}(\tau) \\ K_{f_3f_1}(\tau) & K_{f_3f_2}(\tau) & K_{f_3f_3}(\tau) & K_{f_3f_4}(\tau) \\ K_{f_4f_1}(\tau) & K_{f_4f_2}(\tau) & K_{f_4f_3}(\tau) & K_{f_4f_4}(\tau) \end{bmatrix} \tag{4}$$

или соответствующей матрицей спектральных плотностей

$$\mathbf{S}_{\vec{f}}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{f_1f_1}(\omega) & S_{f_1f_2}(\omega) & S_{f_1f_3}(\omega) & S_{f_1f_4}(\omega) \\ S_{f_2f_1}(\omega) & S_{f_2f_2}(\omega) & S_{f_2f_3}(\omega) & S_{f_2f_4}(\omega) \\ S_{f_3f_1}(\omega) & S_{f_3f_2}(\omega) & S_{f_3f_3}(\omega) & S_{f_3f_4}(\omega) \\ S_{f_4f_1}(\omega) & S_{f_4f_2}(\omega) & S_{f_4f_3}(\omega) & S_{f_4f_4}(\omega) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где τ – время корреляции; $\omega = \theta v$ – круговая или циклическая частота случайного процесса, с$^{-1}$; v – скорость движения, м/с.

При $\sigma_z = 1$ м будем иметь:

$$S_{f_1f_1}(\omega) = S_{f_2f_2}(\omega) = S_{f_3f_3}(\omega) = \\ = S_{f_4f_4}(\omega) = \frac{1}{v} S_1\left(\frac{\omega}{v}\right); \tag{6}$$

$$S_{f_1f_2}(\omega) = S^*_{f_2f_1}(\omega) = S_{f_3f_4}(\omega) = \\ = S^*_{f_4f_3}(\omega) = \frac{1}{v} e^{i\omega l/v} S_1\left(\frac{\omega}{v}\right); \tag{7}$$

$$S_{f_1f_4}(\omega) = S^*_{f_4f_1}(\omega) = S_{f_2f_3}(\omega) = \\ = S^*_{f_3f_2}(\omega) = \frac{1}{v} e^{i\omega l/v} S_1\left(\frac{\omega}{v}\right) K_2(b); \tag{8}$$

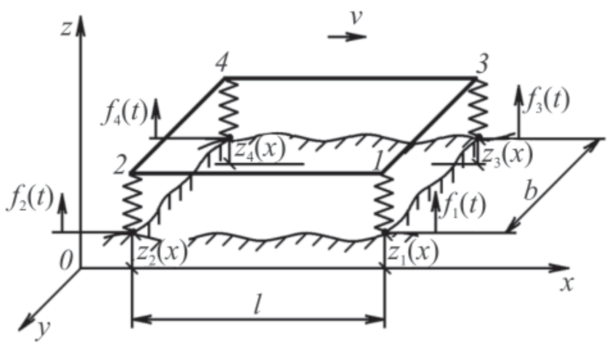

Рис. 1. Кинематические воздействия на четырехколесную транспортную машину

$$S_{f_1f_3}(\omega) = S^*_{f_3f_1}(\omega) = S_{f_2f_4}(\omega) = \\ = S^*_{f_4f_2}(\omega) = \frac{1}{v} S_1\left(\frac{\omega}{v}\right) K_2(b), \tag{9}$$

где l, b – база и колея транспортной машины, м; i – мнимая единица; * – символ комплексно-сопряженной величины.

Информация о кинематических воздействиях, представленная матрицами (4) или (5), используется для решения задач статистической динамики транспортных машин. При этом элементы этих матриц с точностью до σ_z^2 полностью определяются функциями $K_1(x)$, $K_2(y)$ или $S_1(\theta_1)$, $S_2(\theta_2)$, которые могут быть получены по экспериментальным данным для исследованных дорог. В настоящее время накоплен большой материал по корреляционным функциям $K_1(x)$ дорог с различными типами покрытий. Наиболее часто используются следующие зависимости [2]:

$$K_1(x) = e^{-\alpha_1 |x|}; \tag{10}$$

$$K_1(x) = e^{-\alpha_2 |x|} \cdot \cos\beta_1 |x|; \tag{11}$$

$$K_1(x) = A_1 \cdot e^{-\alpha_3 |x|} + A_2 \cdot e^{-\alpha_4 |x|} \cdot \cos\beta_2 x, \tag{12}$$

где A_1, A_2 – весовые коэффициенты ($A_1 + A_2 = 1$); α_1, α_2, α_3, α_4 – параметры, характеризующие быстроту затухания корреляционной связи ординат микропрофиля, м$^{-1}$; β_1, β_2 – параметры, характеризующие гармоническую составляющую микропрофиля, м$^{-1}$.

В данных выражениях параметры α_i и β_i зависят главным образом от длины неровности. Чем меньше длина неровности, тем больше значение этих параметров.

Соответствующие корреляционным функциям (10)–(12) выражения для спектральных плотностей имеют вид [2]:

$$S_1(\theta)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2+\theta^2}; \tag{13}$$

$$S_1(\theta)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_2\left(\alpha_2^2+\beta_1^2+\theta^2\right)}{\left(\theta^2-\alpha_2^2-\beta_1^2\right)^2+4\alpha_2^2\theta^2}. \tag{14}$$

$$S_1(\theta)=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\begin{array}{c} A_1\cdot\dfrac{\alpha_3}{\alpha_3^2+\theta^2}+A_2\cdot \\ \cdot\dfrac{\alpha_4^2+\beta_2^2+\theta^2}{\left(\theta^2-\alpha_4^2-\beta_2^2\right)^2+4\alpha_4^2\theta^2}\end{array}\right). \tag{15}$$

В технических приложениях спектральные плотности определяются только для положительных частот. Для их обозначения введем волнистую черту сверху. Тогда

$$\tilde{S}_1(\theta)=2S_1(\theta). \tag{16}$$

Получение численного массива ординат микропрофиля

Исходной информацией для данного метода является корреляционная функция $K_1(x)$ или спектральная плотность $S_1(\theta_1)$ продольного профиля дороги, а также корреляционная функция $K_2(y)$ или спектральная плотность $S_2(\theta_2)$ поперечного профиля дороги. Как правило, в научно-технической литературе информации по продольному профилю дороги (см. зависимости (10)–(15)) достаточно. Однако почти нет информации по корреляционной функции $K_2(y)$ и спектральной плотности $S_2(\theta)$ поперечного профиля дороги. Их отсутствие компенсируют введением в рассмотрение некоторых эмпирических зависимостей. Так, в работе [7] предлагается для получения ординат микропрофиля по двум колеям использовать спектральные плотности полусуммы $S_{0,5(z_л+z_п)}(\theta)$ и полуразности $S_{0,5(z_л-z_п)}(\theta)$ ординат:

$$S_{0,5(z_л+z_п)}(\theta)=S_1(\theta)\frac{1+\rho(\theta)}{2}; \tag{17}$$

$$S_{0,5(z_л-z_п)}(\theta)=S_1(\theta)\frac{1-\rho(\theta)}{2}; \tag{18}$$

$$\rho(\theta)=\left[1+\left(\frac{B\theta}{k}\right)^2\right]^{-1}, \tag{19}$$

где $\rho(\theta)$ – коэффициент корреляции между возмущениями под левым и правым колесами; B – ширина колеи; k – коэффициент, зависящий от вида спектральной плотности.

Получим дифференциальные уравнения для компьютерного моделирования случайного микропрофиля дороги по двум колеям движения транспортной машины, имеющего заданные статистические характеристики, в качестве которых принимается спектральная плотность.

Будем считать, что процесс $z(t)$ может быть описан спектральной плотностью в виде дробно-рациональной функции, а процесс $z_0(t)$ будем считать белым шумом со спектральной плотностью $\tilde{S}_0(\theta)=1/\pi=\text{const}$.

Для решения поставленной задачи рассмотрим систему, описываемую уравнением [8, 9, 10]:

$$L_1\{z(t)\}=L_2\{z_0(t)\}, \tag{20}$$

где линейные дифференциальные операторы L_1 и L_2 определяются соотношениями:

$$L_1=a_0\frac{d^n}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{d}{dt}+a_n; \tag{21}$$

$$L_2=b_0\frac{d^m}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{d}{dt}+b_m, \tag{22}$$

$$\left(m,\ n\ge 0;\ m\le n-1\right).$$

При этом спектральные плотности процессов $z(t)$ и $z_0(t)$ связаны соотношением:

$$\tilde{S}_1(\theta)=\frac{\left|b_0(i\theta)^m+b_1(i\theta)^{m-1}+\ldots+b_{m-1}(i\theta)+b_m\right|^2}{\left|a_0(i\theta)^n+a_1(i\theta)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(i\theta)+a_n\right|^2}\cdot\tilde{S}_0(\theta). \tag{23}$$

Следовательно, поставленная задача всегда может быть решена соответствующим подбором коэффициентов a_i и b_j $\left(i=0,\ 1,\ldots,n;\ j=0,\ 1,\ldots,m\right)$.

Сформируем микропрофили со спектральной плотностью (13) [11]. Для удобства расчет будем вести для положительных частот. Тогда, согласно выражениям (17) – (19) получим:

$$\tilde{S}_{0,5(z_л+z_п)}(\theta)=2\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2+\theta^2}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{1+\xi\theta^2}}{2}= \\ =\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_1\xi\theta^2+2\alpha_1}{\xi\theta^4+\left(\alpha_1^2\xi+1\right)\theta^2+\alpha_1^2}; \tag{24}$$

$$\tilde{S}_{0,5(z_л-z_п)}(\theta)=2\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2+\theta^2}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{1+\xi\theta^2}}{2}= \\ =\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_1\xi\theta^2}{\xi\theta^4+\left(\alpha_1^2\xi+1\right)\theta^2+\alpha_1^2}, \tag{25}$$

$$\xi=\left(\frac{B}{k}\right)^2.$$

Приравнивая правые части выражений (23) и (24)

$$\frac{\left|b_0(i\theta)^m+b_1(i\theta)^{m-1}+...+b_{m-1}(i\theta)+b_m\right|^2}{\left|a_0(i\theta)^n+a_1(i\theta)^{n-1}+...+a_{n-1}(i\theta)+a_n\right|^2}\cdot\tilde{S}_0(\theta)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_1\xi\theta^2+2\alpha_1}{\xi\theta^4+\left(\alpha_1^2\xi+1\right)\theta^2+\alpha_1^2}$$

и учитывая, что $\tilde{S}_0(\theta)=\frac{1}{\pi}$, получим:

$$m=1;\ b_0=\sqrt{\xi\alpha_1};\ b_1=\sqrt{2\alpha_1};$$

$$n=2;\ a_0=\sqrt{\xi};\ a_1=\alpha_1\sqrt{\xi}+1;\ a_2=\alpha_1.$$

По зависимостям (21), (22) определяем L_1 и L_2, и, подставляя их в выражение (20), получим дифференциальное уравнение вида

$$\sqrt{\xi}\ddot{z}+\left(\alpha_1\sqrt{\xi}+1\right)\dot{z}+\alpha_1 z=\sqrt{\xi\alpha_1}\dot{z}_0+\sqrt{2\alpha_1}z_0.$$

От этого уравнения переходим к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases}\dot{z}=z_1+\sqrt{\alpha_1}z_0;\\ \dot{z}_1=-\left(\alpha_1+\dfrac{1}{\sqrt{\xi}}\right)z_1-\dfrac{\alpha_1}{\sqrt{\xi}}z+\sqrt{\alpha_1}\left(-\alpha_1+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\xi}}\right)z_0.\end{cases}\quad(26)$$

Приравнивая правые части выражений (23) и (25)

$$\frac{\left|b_0(i\theta)^m+b_1(i\theta)^{m-1}+...+b_{m-1}(i\theta)+b_m\right|^2}{\left|a_0(i\theta)^n+a_1(i\theta)^{n-1}+...+a_{n-1}(i\theta)+a_n\right|^2}\cdot\tilde{S}_0(\theta)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_1\xi\theta^2}{\xi\theta^4+\left(\alpha_1^2\xi+1\right)\theta^2+\alpha_1^2}$$

и подставив $\tilde{S}_0(\theta)=\frac{1}{\pi}$, найдем:

$$m=1;\ b_0=\sqrt{\xi\alpha_1};\ b_1=0;\ n=2;$$

$$a_0=\sqrt{\xi};\ a_1=\alpha_1\sqrt{\xi}+1;\ a_2=\alpha_1.$$

Опять по зависимостям (21), (22) определяем L_1 и L_2 и подставляем их в выражение (20). В результате получим дифференциальное уравнение

$$\sqrt{\xi}\ddot{z}+\left(\alpha_1\sqrt{\xi}+1\right)\dot{z}+\alpha_1 z=\sqrt{\xi\alpha_1}\dot{z}_0,$$

или в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases}\dot{z}=z_1+\sqrt{\alpha_1}z_0;\\ \dot{z}_1=-\left(\alpha_1+\dfrac{1}{\sqrt{\xi}}\right)z_1-\dfrac{\alpha_1}{\sqrt{\xi}}z-\sqrt{\alpha_1}\left(\alpha_1+\dfrac{1}{\sqrt{\xi}}\right)z_0.\end{cases}\quad(27)$$

Системы уравнений (26) и (27) определяют уравнения формирующего фильтра полусуммы и полуразности высот микропрофиля по левой и правой колеям.

Для примера по ним проведен расчет микропрофиля дорожной поверхности по двум колеям при следующих исходных данных: $\sigma_z=0{,}013$ м; $\alpha_1=0{,}45$ с$^{-1}$; $B=1{,}8$ м (ровное булыжное покрытие [2]); $k=4{,}5$ [7] при $v=1$ м/с.

Соответствующие реализации случайных функций приведены на рис. 2, *а*.

Сформируем микропрофили со спектральной плотностью (14). Тогда, согласно выражениям (17) – (19) получаем:

$$\tilde{S}_{0,5(z_л+z_п)}(\theta)=2\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_2\theta^2+\alpha_2\beta_1^2+\alpha_2^3}{\left(\theta^2-\alpha_2^2-\beta_1^2\right)^2+4\alpha_2^2\theta^2}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{1+\xi\theta^2}}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_2\xi\theta^4+\left(\alpha_2^3\xi+\alpha_2\beta_1^2\xi+2\alpha_2\right)\theta^2+2\alpha_2^3+2\alpha_2\beta_1^2}{\xi\theta^6+\left(\left(2\alpha_2^2-2\beta_1^2\right)\xi+1\right)\theta^4+\left(\left(\alpha_2^2+\beta_1^2\right)^2\xi+\left(2\alpha_2^2-2\beta_1^2\right)\right)\theta^2+\left(\alpha_2^2+\beta_1^2\right)^2};$$

$$\tilde{S}_{0,5(z_л-z_п)}(\theta)=2\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_2\theta^2+\alpha_2\beta_1^2+\alpha_2^3}{\left(\theta^2-\alpha_2^2-\beta_1^2\right)^2+4\alpha_2^2\theta^2}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{1+\xi\theta^2}}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_2\xi\theta^4+\left(\alpha_2^3\xi+\alpha_2\beta_1^2\xi\right)\theta^2}{\xi\theta^6+\left(\left(2\alpha_2^2-2\beta_1^2\right)\xi+1\right)\theta^4+\left(\left(\alpha_2^2+\beta_1^2\right)^2\xi+\left(2\alpha_2^2-2\beta_1^2\right)\right)\theta^2+\left(\alpha_2^2+\beta_1^2\right)^2}.$$

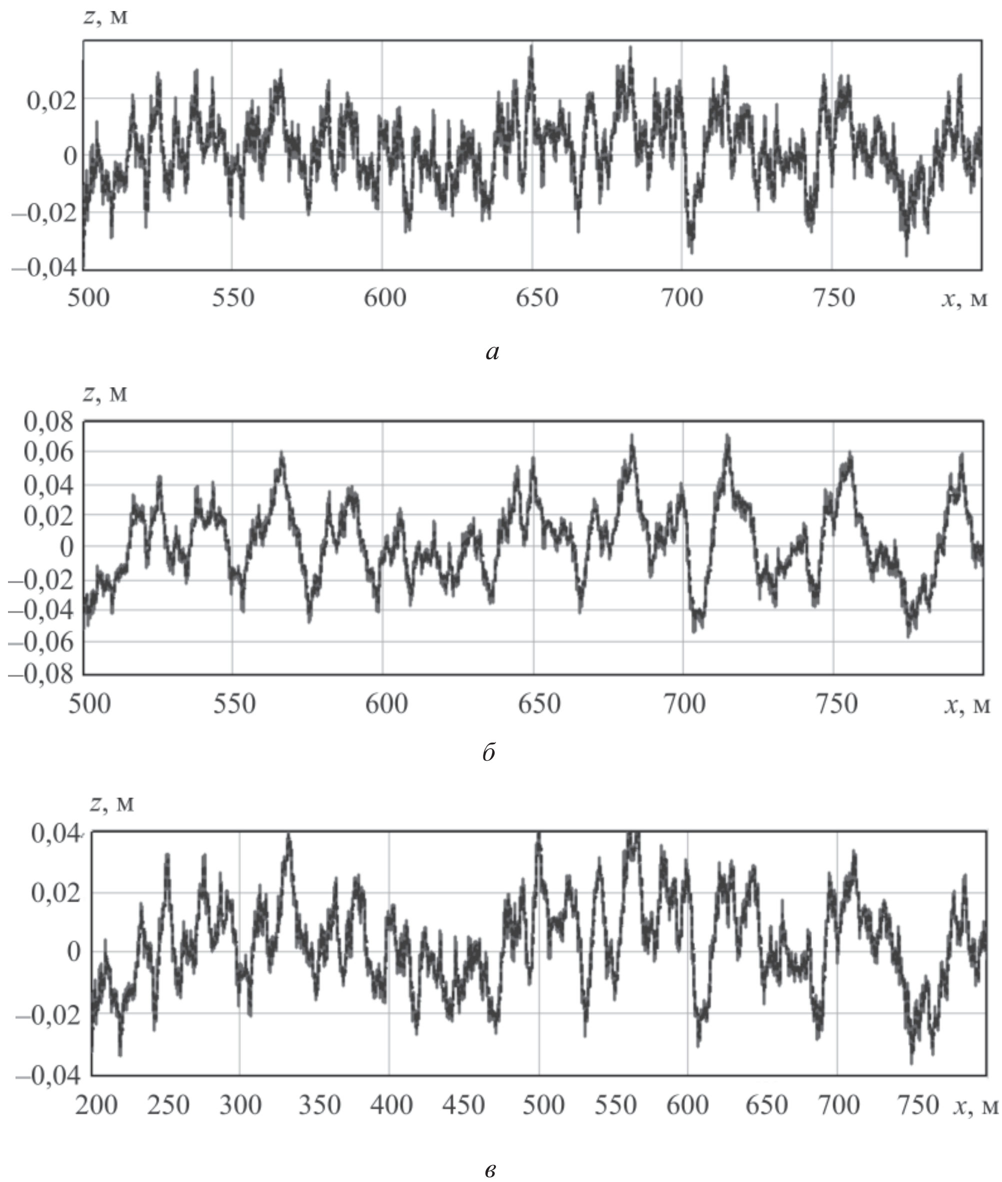

Рис. 2. Смоделированные микропрофили по двум колеям:

а – ровное булыжное покрытие;

б – разбитое булыжное покрытие;

в – асфальтовое покрытие в хорошем состоянии

Приравнивая правые части полученных выражений к правой части зависимости (23), получим:

– для первого выражения:

$$\tilde{S}_0(\theta) = \frac{1}{\pi};\ m = 2;\ b_0 = \sqrt{\xi\alpha_2};\ b_2 = \sqrt{2\alpha_2^3 + 2\alpha_2\beta_1^2};$$

$$b_1 = \sqrt{\alpha_2^3\xi + \alpha_2\beta_1^2\xi + 2\alpha_2 + 2b_0b_2};$$

$$n = 3;\ a_0 = \sqrt{\xi};\ a_3 = \alpha_2^2 + \beta_1^2,$$

а для определения a_1 и a_2 нужно решить систему двух уравнений

$$\begin{cases} a_1^2 - 2a_0a_2 = \left(2\alpha_2^2 - 2\beta_1^2\right)\xi + 1; \\ a_2^2 - 2a_1a_3 = \left(\alpha_2^2 + \beta_1^2\right)^2 \xi + \left(2\alpha_2^2 - 2\beta_1^2\right); \end{cases}$$

– для второго выражения:

$$\tilde{S}_0(\theta) = \frac{1}{\pi};\ a_i\ \left(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3\right)\text{ те же};\ b_0 = \sqrt{\xi\alpha_2};$$

$$b_2 = 0;\ b_1 = \sqrt{\alpha_2^3\xi + \alpha_2\beta_1^2\xi}.$$

Составляем выражения для L_1 (21) и L_2 (22) и подставляем их в зависимость (20). Ввиду громоздкости полученных коэффициентов, представим полученное дифференциальное уравнение в общем виде:

$$a_0\dddot{z} + a_1\ddot{z} + a_2\dot{z} + a_3 z = b_0\ddot{z}_0 + b_1\dot{z}_0 + b_2 z_0. \quad (28)$$

Решая его, составим уравнения фильтра:

$$\begin{cases} \dot{z} = z_1 + \dfrac{b_0}{a_0} z_0; \\ \dot{z}_1 = z_2 + \dfrac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2} z_0; \\ \dot{z}_2 = -\dfrac{a_1}{a_0} z_2 - \dfrac{a_2}{a_0} z_1 - \dfrac{a_3}{a_0} z + \\ +\left(\dfrac{b_2}{a_0} - \dfrac{a_1}{a_0}\cdot\dfrac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2} - \dfrac{a_2 b_0}{a_0^2}\right) z_0. \end{cases} \quad (29)$$

В частном случае для $\sigma_z = 0{,}027$ м; $\alpha_2 = 0{,}1$ с$^{-1}$; $\beta_1 = 0{,}238$ с$^{-1}$; $B = 1{,}8$ м (разбитое булыжное покрытие [2]); $k = 5{,}8$ [7] микропрофили представлены на рис. 2, *б*.

При моделировании микропрофилей по спектральной плотности вида (15) согласно (17)–(19) имеем следующие выражения:

$$\tilde{S}_{0,5(z_л \pm z_п)}(\theta) = \frac{1 \pm \dfrac{1}{1+\xi\theta^2}}{2}\cdot F(\theta);$$

$$F(\theta) = \frac{2}{\pi}\left(A_1\cdot\frac{\alpha_3}{\alpha_3^2+\theta^2} + A_2\cdot\frac{\alpha_4^2+\beta_2^2+\theta^2}{\left(\theta^2-\alpha_4^2-\beta_2^2\right)^2 + 4\alpha_4^2\theta^2}\right).$$

Приравнивая их правые части к правой части зависимости (23), получаем:

$$\frac{\left|b_0(i\theta)^m + b_1(i\theta)^{m-1} + \ldots + b_{m-1}(i\theta) + b_m\right|^2}{\left|a_0(i\theta)^n + a_1(i\theta)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(i\theta) + a_n\right|^2}\cdot\tilde{S}_0(\theta) = $$
$$= F(\theta)\cdot\frac{1+\dfrac{1}{1+\xi\theta^2}}{2}; \quad (30)$$

$$\frac{\left|b_0(i\theta)^m + b_1(i\theta)^{m-1} + \ldots + b_{m-1}(i\theta) + b_m\right|^2}{\left|a_0(i\theta)^n + a_1(i\theta)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(i\theta) + a_n\right|^2}\cdot\tilde{S}_0(\theta) = $$
$$= F(\theta)\cdot\frac{1-\dfrac{1}{1+\xi\theta^2}}{2}, \quad (31)$$

откуда $\tilde{S}_0(\theta) = \dfrac{1}{\pi}$; $m = 3$; $n = 4$.

Следовательно, для составления уравнений формирующего фильтра нужно использовать дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$a_0 z^{IV} + a_1\dddot{z} + a_2\ddot{z} + a_3\dot{z} + a_4 z = $$
$$= b_0\dddot{z}_0 + b_1\ddot{z}_0 + b_2\dot{z}_0 + b_3 z_0, \quad (32)$$

из которого получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{z} = z_1 + \dfrac{b_0}{a_0} z_0; \\ \dot{z}_1 = z_2 + \dfrac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2} z_0; \\ \dot{z}_2 = z_3 + C z_0; \\ \dot{z}_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} z_3 - \dfrac{a_2}{a_0} z_2 - \dfrac{a_3}{a_0} z_1 - \dfrac{a_4}{a_0} z + \\ +\left(\dfrac{a_0 b_3 - a_3 b_0}{a_0^2} - \dfrac{a_2}{a_0}\cdot\dfrac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2} - \dfrac{a_1}{a_0}\cdot C\right)\cdot z_0; \end{cases} \quad (33)$$

$$C = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_0^2} - \frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2}.$$

Для зависимости (30):

$$b_0 = \sqrt{\left(A_1\alpha_3 + A_2\alpha_4\right)\xi};$$

$$b_3 = \sqrt{2A_1\alpha_3\left(-\beta_2^2-\alpha_4^2\right)^2 + 2A_2\left(\alpha_4^3+\alpha_4\beta_2^2\right)\alpha_3^2}.$$

Для определения b_1, b_2 нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1^2 - 2b_0 b_2 = \left[A_1\alpha_3\left(-2\beta_2^2+2\alpha_4^2\right) + A_2\left(\alpha_4^3+\alpha_4\beta_2^2\right) + \right. \\ \left. + A_2\alpha_4\alpha_3^2\right]\xi + 2A_1\alpha_3 + 2A_2\alpha_4; \\ b_2^2 - 2b_1 b_3 = \left[A_1\alpha_3\left(-\beta_2^2-\alpha_4^2\right)^2 + A_2\left(\alpha_4^3+\alpha_4\beta_2^2\right)\alpha_3^2\right]\xi + \\ +2A_1\alpha_3\left(-2\beta_2^2+2\alpha_4^2\right) + 2A_2\left(\alpha_4^3+\alpha_4\beta_2^2\right) + 2A_2\alpha_4\alpha_3^2. \end{cases}$$

$$a_0 = \sqrt{\xi};$$

$$a_4 = \sqrt{\left(-\beta_2^2-\alpha_4^2\right)\alpha_3^2}.$$

Значения a_1, a_2, a_3 можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1^2 - 2a_0 a_2 = \left(-2\beta_2^2 + 2\alpha_4^2 + \alpha_3^2\right)\xi + 1; \\ a_2^2 + 2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 = \left[\left(-\beta_2^2-\alpha_4^2\right)\alpha_3^2\right]\xi - \\ -2\beta_2^2 + 2\alpha_4^2 + \alpha_3^2; \\ a_3^2 - 2a_2 a_4 = \left(-\beta_2^2-\alpha_4^2\right)^2\alpha_3^2\xi + \\ +\left(-\beta_2^2-\alpha_4^2\right)^2 + \left(-2\beta_2^2+2\alpha_4^2\right)\alpha_3^2. \end{cases}$$

Для зависимости (31) коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 такие же как для (30). Кроме того,

$$b_0 = \sqrt{\left(A_1\alpha_3 + A_2\alpha_4\right)\xi};\; b_3 = 0.$$

Например, при $A_1 = 0,85$; $A_2 = 0,15$; $\sigma_z = 0{,}008$ м; $\alpha_3 = 0,2$ с$^{-1}$; $\alpha_4 = 0,05$ с$^{-1}$; $\beta_2 = 0,6$ с$^{-1}$; $B = 1,8$ м (асфальтированное шоссе [2]); $k = 5,8$ [7] получаем:

$b_0 = 1,046 \cdot 10^{-3}$; $b_1 = 49,846 \cdot 10^{-4}$; $b_2 = 13,657 \cdot 10^{-3}$; $b_3 = 1,695 \cdot 10^{-3}$; $a_0 = 0,31$; $a_1 = 1,093$; $a_2 = 4,187 \cdot 10^{-1}$; $a_3 = 0,405$; $a_4 = 0,073$; $b_0 = 1,046 \cdot 10^{-3}$; $b_1 = 21,806 \cdot 10^{-5}$; $b_2 = 37,198 \cdot 10^{-5}$; $b_3 = 0$; $a_0 = 0,31$; $a_1 = 1,093$; $a_2 = 4,187 \cdot 10^{-1}$; $a_3 = 0,405$; $a_4 = 0,073$.

Микропрофили по двум колеям, полученные при использовании уравнений (33), приведены на рис. 2, *в*.

Следует отметить, что на каждом рис. 2, *а*, *б*, *в* приведены фактически два микропрофиля – для левой и правой колеи, которые практически совпадают. Это свидетельствует об одинаковом разбросе их значений и частот.

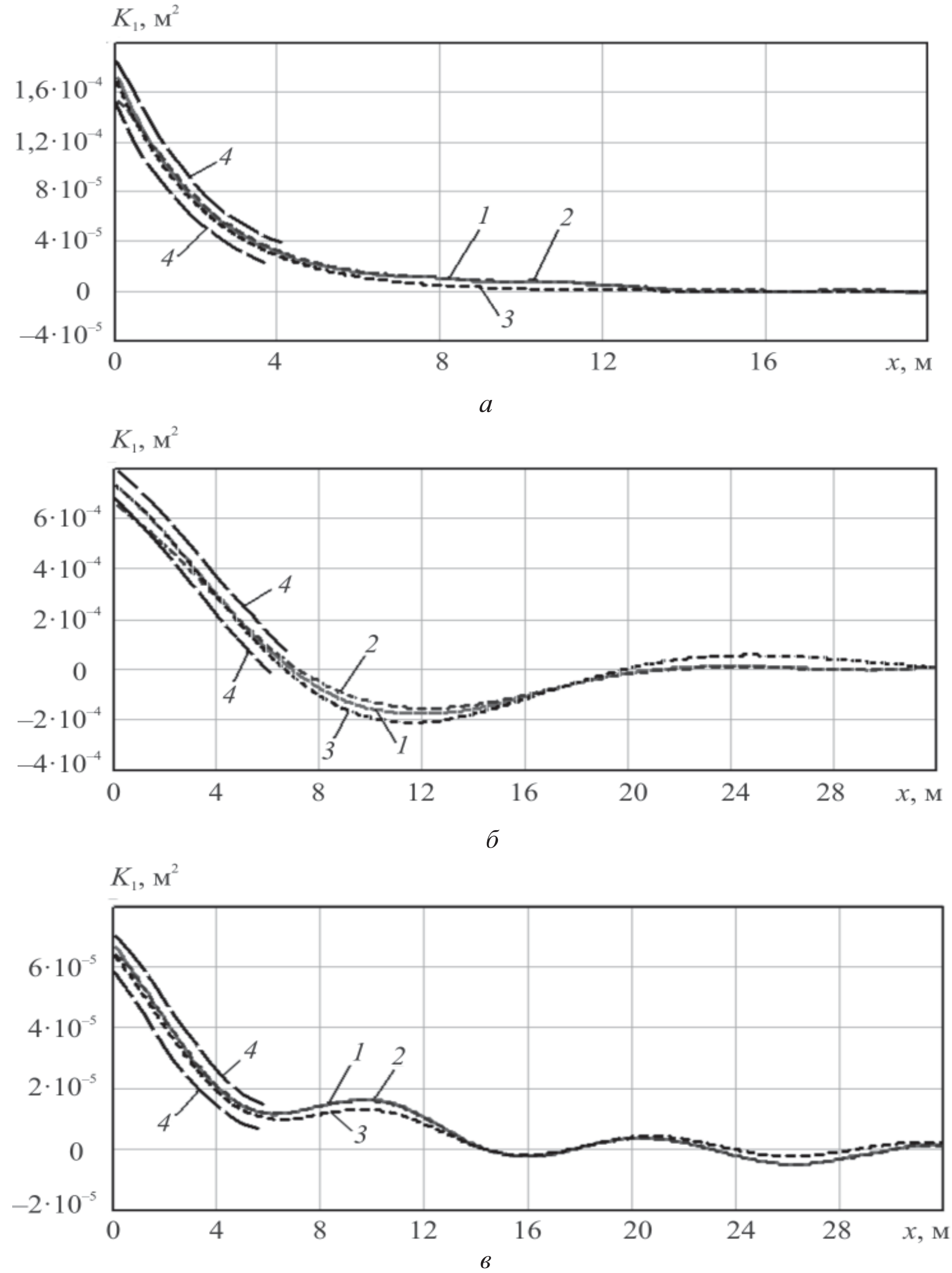

Рис. 3. Корреляционные функции:
а – ровное булыжное покрытие; *б* – разбитое булыжное покрытие; *в* – асфальтовое покрытие в хорошем состоянии

Результаты моделирования микропрофиля с использованием формирующего фильтра

На рисунке 3 приведены графики корреляционных функций, построенные для смоделированных профилей по левой (линия 1) и правой (линия 2) колеям, а также график исходной (аналитической) корреляционной функции (пунктирная линия 3). Как видно из представленных результатов, графики корреляционных функций практически совпадают друг с другом для каждого типа дороги. Адекватность разработанного метода моделирования микропрофиля дороги подтверждается совместимостью в пределах доверительных границ (пунктирные линии 4) с уровнем значимости 0,9 построенных корреляционных функций для дорог с двумя колеями движения транспортной машины. Определение границ осуществлялось с использованием стандартных методов математической статистики [12–14].

Заключение

Предложены два способа моделирования микропрофиля дороги по двум колеям движения транспортной машины. Первый способ основан на введении матриц корреляционных функций или спектральных плотностей, которые рекомендуются для использования при решении задач статистической динамики машин. Второй способ основан на использовании численного массива, получаемого при помощи формирующего фильтра, может применяться при численном решении задач динамики транспортной машины.

В работе решена задача моделирования случайного микропрофиля дорожной поверхности по различным колеям транспортной машины для наиболее часто встречающихся в литературе выражений спектральных плотностей дорог, среди которых рассмотрены дороги с ровным булыжным покрытием, разбитым булыжным и асфальтовым покрытиями. Для проверки ее адекватности также решена обратная задача, состоящая в том, что по смоделированным микропрофилям были получены графики корреляционных функций, которые сравнивались с кривыми исходных корреляционных функций. Наблюдается достаточно хорошее совпадение, что свидетельствует о правомерности использования полученных уравнений для формировании исходных данных кинематических воздействий при решении задач статистической динамики машин.

Список литературы

1. *Whitney C.A.* Random processes in physical systems. New York: John Willey, 1990. – 320 p.
2. *Тарасик В.П.* Теория движения автомобиля: учебник для вузов. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 478 с.
3. *Шалыгин А.С., Палагин Ю.И.* Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд., 1986. – 320 с.
4. *Рыков С.П.* Основы теории и методы оценки поглощающей и сглаживающей способности пневматической шины для расчетов подвески, колебаний и плавности хода автомобиля: дис. ... докт. техн. наук. М., 2005. – 430 с.
5. *Чабунин И.С.* Моделирование случайного микропрофиля дорожной поверхности методом формирующего фильтра // Извести МГТУ «МАМИ». 2013. Т. 1. № 1 (15). С. 218–225.
6. *Чабунин И.С.*, *Щербаков В.И.* Применение метода спектральных представлений для решения задач статистической динамики автомобиля // Журнал Автомобильных Инженеров. 2013. № 4 (81). С. 28–32.
7. *Хачатуров А.А., Афанасьев В.Л., Васильев В.С. и др.* Динамика системы дорога-шина-автомобиль-водитель под ред. А.А. Хачатурова. М.: Машиностроение, 1976. – 535 с.
8. *Гусев А.С., Карунин А.Л., Крамской Н.А., Стародубцева С.А.* Надежность механических систем и конструкций при случайных воздействиях под ред. А.Л. Карунина. МГТУ «МАМИ», 2001. – 284 с.
9. *Гусев А.С.* Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 223 с.
10. *Щербаков В.И.*, *Чабунин И.С.* Избранные задачи по динамике механических систем и конструкций: Учебное пособие. 3-е изд., испр. и доп. М.: МГТУ «МАМИ», 2011. – 289 с.
11. *Чабунин И.С.* К вопросу моделирования микропрофиля дороги по колеям // Известия МГТУ «МАМИ». 2013. Т. 1. №1 (15). С. 225–230.
12. *Вентцель Е.С.*, *Овчаров А.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. – 480 с.
13. *Вентцель Е.С.*, *Овчаров А.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.

14. *Щербаков В.И., НадеждинВ.С.* Анализ случайного процесса нагружения конструкций: Учебное пособие. М.: Университет машиностроения, 2012. – 15 с.

Материал поступил в редацию 09.11.14

ЧАБУНИН
Игорь Сергеевич

E-mail: **tchabunin@rambler.ru**
Тел.: **8 (916) 859-59-03**

Кандидат технических наук, доцент кафедры общепрофессиональных дисциплин Военного института (общевойскового) ВУНЦ СВ «ОВА ВС РФ». Сфера научных интересов: расчеты на прочность, динамика машин. Автор более 100 публикаций, одного изобретения, двух полезных моделей.

ЩЕРБАКОВ
Владимир Иванович

E-mail: **visherbakov@mail.ru**
Тел.: **8 (495) 223-05-23**

Кандидат технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов Московского государственного машиностроительный университет (МАМИ). Сфера научных интересов: расчеты на прочность, статистическая динамика машин, теория надежности машин. Автор более 160 публикаций и 15 изобретений.