

ДИНАМИКА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА С РЕЗОНАТОРОМ В ВИДЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ

А.С. Степанов, Е.С. Сбытова, В.В. Подалков

Разработана математическая модель микромеханического гироскопа с резонатором в виде четырех упругих стержней. Методом двух масштабов построено решение нелинейных уравнений движения чувствительного элемента микромеханического гироскопа на вибрирующем основании. Исследована устойчивость по Ляпунову стационарных решений и в пространстве параметров системы указаны области устойчивости стационарных режимов колебаний.

Ключевые слова: микромеханический гироскоп, вибрирующее основание, стационарные колебания, устойчивость.

DYNAMICS OF MICROMECHANICAL GYROSCOPE WITH RESONATOR IN THE FORM OF ELASTIC RODS ON VIBRATING BASE

A. Stepanov, E. Sbytova, V. Podalkov

The mathematical model of micromechanical gyroscope with a resonator in the form of four elastic rods has been designed. The solution of the nonlinear equations of the sensitive element motion of micromechanical gyroscope on the vibrating base has been constructed using of the method of two scales. Lyapunov stability of the stationary solutions has been investigated, and the areas of stability of stationary oscillations have been specified in the space of system parameters. It has been shown that nonlinear effects significantly influence the form of amplitude-frequency characteristics.

Keywords: micromechanical gyroscope, vibrating base, stationary oscillations, stability.

Введение

Микросистемная техника – наиболее интенсивно и динамично развивающееся направление современного приборостроения. С применением новых технологий микроэлектромеханических систем (МЭМС) удастся создавать датчики инерциальной информации, имеющие малые массово-геометрические характеристики, невысокую стоимость и низкое энергопотребление.

Наиболее перспективными датчиками инерциальной информации являются микромеханические гироскопы (ММГ) – одноосные вибрационные гироскопы [1], изготовленные на базе кремниевых технологий, эксплуатационным

преимуществом которых является отсутствие вращающихся частей.

Микромеханические гироскопы находят широкое применение в различных областях: в медицине – в качестве приборов для прецизионного позиционирования микроинструментов в хирургии, в интеллектуальных системах протезирования, в оборонной промышленности, в бытовой технике, например, для стабилизации изображений видео и фотоаппаратуры, в мобильных телефонах и др. При этом проблема увеличения точности этих датчиков является актуальной и на данный момент. Решение этой задачи заключается не только в повышении технологического качества изготовле-

ния, но и в создании методики проектирования микроэлектромеханических устройств, в разработке новых математических моделей чувствительных элементов, позволяющих повысить точность гироскопических датчиков и систем управления на их основе. Актуальной является разработка аналитических методов компенсации погрешностей, алгоритмического и программного обеспечения для стендовых испытаний датчиков, учитывающие различные факторы внешней среды и конструктивные особенности прибора.

Целью данной работы является создание максимально точной математической модели микромеханического гироскопа, учитывающей конструктивные особенности прибора, а также исследование влияния внешних условий функционирования, таких как угловая вибрация основания. Достижение этой цели подразумевает построение областей устойчивости, позволяющих определить диапазоны значений параметров гироскопа, а именно демпфирования, частоты и амплитуды вибрации.

Предложенная модель позволяет решить проблемы аналитического представления условий функционирования и учета их влияния на динамику прибора. При этом предложенные алгоритмы исследования могут быть применены для других гироскопов класса обобщенный маятник Фуко [2].

Постановка задачи

В настоящей работе объектом исследования является новый микромеханический осцилляторный вибрационный гироскоп с резонатором в виде четырех упругих

стержней. Конструктивная схема гироскопа представляет собой чувствительный элемент – четыре одинаковых упругих стержня 1, закрепленных в рамке 2, соединенной упругим торсионом 3 с основанием 4 (рис. 1). Длина стержня прямоугольного поперечного сечения обозначена через l .

С подвижной рамкой 2 связана система координат (ξ, η, ζ) . При этом основание вращается вокруг оси ξ с угловой скоростью Ω , в общем случае являющейся некоторой функцией времени t . Ось ξ называется осью чувствительности гироскопа.

Рассматриваются колебания чувствительного элемента в плоскости, перпендикулярной оси ξ . При этом смещениями малого элемента стержня вдоль осей ζ и η пренебрегаем. В качестве внешнего возмущения рассматривается угловая вибрация основания вокруг оси ξ .

Под действием электростатической системы управления резонатор совершает периодическое движение, измерение которого позволяет определить вращение основания гироскопа в инерциальном пространстве.

Для описания колебаний стержня введена функция прогиба поверхности упругого стержня $w = w(x, t)$, зависящая от времени t и координаты x , связанной со стержнем, и угол α – малый угол поворота рамки относительно основания гироскопа.

Уравнения движения гироскопа

Кинетическая энергия гироскопа имеет вид:

$$T = 2\rho F \int_0^l \left\{ \left(\frac{l}{2} + w \right)^2 (\Omega + \dot{\alpha})^2 + \left[\dot{w} + \left(x - \frac{l}{2} \right) (\Omega + \dot{\alpha}) \right]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} J_0 (\Omega + \dot{\alpha})^2, \quad (1)$$

где ρ – плотность материала стержня; $F = bh$ – площадь его поперечного сечения (b и h – геометрические размеры поперечного сечения стержня); α – малый угол поворота рамки относительно основания гироскопа; J_0 – момент инерции рамки относительно главной оси ξ . Здесь и далее точкой обозначено дифференцирование по времени t , дифференцирование по координате x обозначено штрихом.

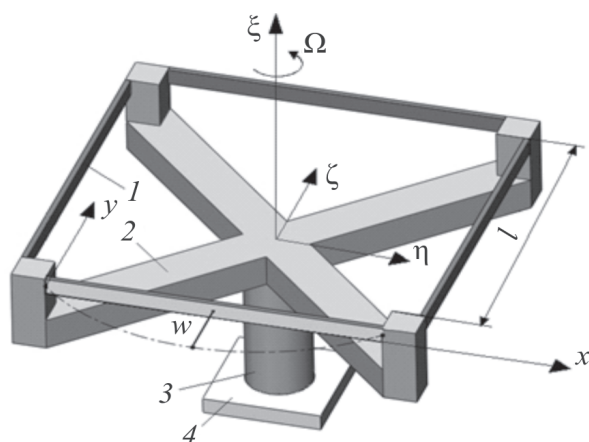


Рис. 1. Конструктивная схема микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней

Потенциальная энергия гироскопа имеет вид:

$$\Pi = 2EJ_{\text{ст}} \int_0^l (w'')^2 dx + \frac{1}{2} c \alpha^2, \quad (2)$$

где $EJ_{\text{ст}}$ – жесткость стержня при изгибе;
 $J_{\text{ст}} = \frac{bh^3}{12}$ – момент инерции поперечного сечения стержня; E – модуль Юнга; c – жесткость торсиона на кручение.

Введем действие по Гамильтону

$$U = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt, \quad (3)$$

где t_1, t_2 – начальный и конечный моменты времени, в которых вариации $\delta w, \delta \alpha$ равны нулю.

Согласно принципу Гамильтона–Остроградского [6], вариация от действия по Гамильтону δU равна нулю. Таким образом, подставляя в (3) выражения для кинетической (1) и потенциальной энергий (2) и варьируя, получаем:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l 4\rho F \left\{ \ddot{w} + \frac{EJ_{\text{ст}}}{\rho F} w'''' + \left(x - \frac{l}{2} \right) (\dot{\Omega} + \ddot{\alpha}) - \right. \\ \left. - (\Omega + \dot{\alpha})^2 \left(\frac{l}{2} + w \right) \right\} \delta w + 4\rho F \left[2\dot{w} \left(\frac{l}{2} + w \right) (\Omega + \dot{\alpha}) + \right. \\ \left. + (lw + w^2) (\dot{\Omega} + \dot{\alpha}) + \left(x - \frac{l}{2} \right) \dot{w} \right] \delta \alpha \Big\} dx dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\frac{4}{3} \rho F l^3 + J_0 \right) (\dot{\Omega} + \ddot{\alpha}) + c \alpha \right\} \delta \alpha dt = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку вариации $\delta w, \delta \alpha$ не зависят друг от друга, выражения, стоящие при них в (4), следует приравнять к нулю.

Таким образом, получаем систему интегродифференциальных уравнений, описывающих динамику гироскопа

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \frac{EJ_{\text{ст}}}{\rho F} w'''' + \frac{E_* J_{\text{ст}}}{\rho F} \dot{w}'''' + (\dot{\Omega} + \ddot{\alpha}) \left(x - \frac{l}{2} \right) - \\ - (\Omega + \dot{\alpha})^2 \left(x - \frac{l}{2} \right) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} J(\dot{\Omega} + \ddot{\alpha}) + c\alpha + \kappa_* \dot{\alpha} + 4\rho F \left[2(\Omega + \dot{\alpha}) \int_0^l \left(\frac{l}{2} + w \right) \dot{w} dx + \right. \\ \left. + (\dot{\Omega} + \ddot{\alpha}) \int_0^l (lw + w^2) dx + \int_0^l \left(x - \frac{l}{2} \right) \dot{w} dx \right] = 0, \end{aligned}$$

где $J = \frac{4}{3} \rho F l^3 + J_0$ – обобщенный момент инерции системы.

В выражениях (5) учтено внутреннее трение по модели Кельвина – Фойгта [5] и введены обозначения: E_* – вязкоупругий модуль материала стержней, характеризующий внутреннее трение в материале; κ_* – коэффициент вязкого трения торсиона. Полагая, что резонатор находится в вакуумированной полости, внешними потерями при колебаниях будем пренебрегать.

При анализе принимается стержень с жестко заделанными концами. Функция нормального прогиба w задается в виде:

$$w = \frac{2\beta(t)}{lW\left(\frac{l}{2}\right)} W(x); \quad (6)$$

$$\begin{aligned} W(x) = (\text{sh} r_1 - \sin r_1) \left(\text{ch} \left(r_1 \frac{x}{l} \right) - \cos \left(r_1 \frac{x}{l} \right) \right) - \\ - (\text{ch} r_1 - \cos r_1) \left(\text{sh} \left(r_1 \frac{x}{l} \right) - \sin \left(r_1 \frac{x}{l} \right) \right), \end{aligned}$$

где $\beta(t)$ – искомая функция формы колебаний, характеризующая прогиб в середине стержня; $\beta(t) \ll 1$; $r_1 = 4,73$ – первый корень трансцендентного уравнения $\text{ch} r_1 \cos r_1 = 1$ [6].

После применения процедуры Бубнова–Галеркина получены дифференциальные уравнения для обобщенных координат β и α :

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \omega_1^2 \beta = -d_1 \dot{\beta} + 2\Omega k_1 \dot{\alpha} + k_1 \dot{\alpha}^2 + \beta \dot{\alpha}^2; \\ \ddot{\alpha} + \omega_2^2 \alpha = -d_2 \dot{\alpha} - 2\Omega k_2 \dot{\beta} - 2k_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} - \\ - 2k_2 \beta \ddot{\alpha} - \frac{k_2}{k_1} \beta^2 \ddot{\alpha} - 2 \frac{k_2}{k_1} \beta \dot{\beta} \dot{\alpha} - \\ - 2k_2 \dot{\Omega} \beta - \frac{k_2}{k_1} \dot{\Omega} \beta^2 - \dot{\Omega}, \end{aligned} \quad (7)$$

где ω_1^2, ω_2^2 – квадраты собственных частот колебаний резонатора на неподвижном основании; d_1, d_2 – коэффициенты демпфирования; k_1, k_2 – коэффициенты при гироскопических слагаемых в математической модели движения.

Значения параметров системы $\omega_1^2, \omega_2^2, d_1, d_2, k_1, k_2$ следующие:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = \frac{EJ_{\text{ст}}}{\rho F} \frac{r_1^4}{l^4}; \quad d_1 = \frac{E_* J_{\text{ст}}}{\rho F} \frac{r_1^4}{l^4}; \quad k_1 = 1,319; \\ \omega_2^2 = \frac{c}{J}; \quad d_2 = \frac{\kappa_*}{J}; \quad k_2 = 0,523 \frac{\rho F l^3}{J}. \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно (8) квадраты собственных частот колебаний ω_1^2 , ω_2^2 в общем случае могут различаться, но для оптимального функционирования гироскопа параметры системы подбираются таким образом, чтобы частоты собственных колебаний были равны. Поэтому примем $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Устойчивость гироскопа на вибрирующем основании

Рассматривается микромеханический гироскоп с резонатором в виде упругих стержней, помещенный на вибрирующее основание. Смоделируем вибрацию основания, представляя угловую скорость в виде

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \sin 2\omega_0 t, \quad (9)$$

где Ω_0 – заданная постоянная составляющая угловой скорости основания; Ω_1 и $2\omega_0$ – амплитуда и частота угловой вибрации основания.

Вводя безразмерное время $t_* = \omega t$ и коэффициенты демпфирования $d_1 = d_2 = 2\gamma_0\omega$, $\gamma_0 \ll 1$, получены безразмерные уравнения для обобщенных координат β и α :

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \beta = & -2\gamma_0 \dot{\beta} + \\ & + 2k_1(v_0 + v_1 \sin 2\hat{\omega}t)\dot{\alpha} + k_1\dot{\alpha}^2 + \beta\dot{\alpha}^2; \\ \ddot{\alpha} + \alpha = & -2\gamma_0 \dot{\alpha} - 2k_2(v_0 + v_1 \sin 2\hat{\omega}t)\dot{\beta} - \\ & - 2k_2\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2k_2\beta\dot{\alpha} - \frac{k_2}{k_1}\beta^2\dot{\alpha} - \\ & - 2\frac{k_2}{k_1}\beta\dot{\beta}\dot{\alpha} - 4k_2v_1\hat{\omega}\cos 2\hat{\omega}t\beta - \\ & - 2\frac{k_2}{k_1}v_1\hat{\omega}\cos 2\hat{\omega}t\beta^2 - 2v_1\hat{\omega}\cos 2\hat{\omega}t. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $v_0 = \frac{\Omega_0}{\omega} \ll 1$ – безразмерная постоянная составляющая угловой скорости основания; $v_1 = \frac{\Omega_1}{\omega} \ll 1$ – нормализованная амплитуда угловой скорости вибрации основания; $\hat{\omega} = \frac{\omega_0}{\omega}$ – безразмерная частота вибрации основания.

Динамика системы (10) рассматривается в резонансном случае, когда частота угловой вибрации близка к удвоенной частоте свободных колебаний системы, т.е.

$$\hat{\omega} - 1 = \Delta\omega. \quad (11)$$

Решение для одночастотной системы (10) в первом приближении имеет вид:

$$\begin{aligned} \beta &= p_1(\tau) \sin \hat{\omega}t + q_1(\tau) \cos \hat{\omega}t + \beta_1(t, \tau); \\ \alpha &= p_2(\tau) \sin \hat{\omega}t + q_2(\tau) \cos \hat{\omega}t + \alpha_1(t, \tau), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\tau = \varepsilon t$ – медленное время, ε – малый положительный параметр, $|\beta| \ll 1$, $|\alpha| \ll 1$.

Учитывая малость величин q_1 , p_1 , q_2 , p_2 , удобно ввести малый параметр ε следующим образом (далее индекс * опущен):

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{\varepsilon}q_1^*; & p_1 &= \sqrt{\varepsilon}p_1^*; \\ q_2 &= \sqrt{\varepsilon}q_2^*; & p_2 &= \sqrt{\varepsilon}p_2^*; \\ \gamma_0 &= \varepsilon\gamma_0^*; & \Delta\omega &= \varepsilon\Delta\omega^*; \\ v_0 &= \varepsilon v_0^*; & v_1 &= \varepsilon v_1^*. \end{aligned} \quad (13)$$

С использованием метода двух масштабов [3], получена система дифференциальных уравнений для определения q_1 , p_1 , q_2 , p_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial \tau} = & -\gamma_0 q_1 - \Delta\omega p_1 + k_1 v_0 q_2 - \\ & - \frac{1}{2}k_1 v_1 p_2 - \frac{1}{8}(p_2^2 + q_2^2)p_1 + \\ & + \frac{q_2}{4}(p_2 q_1 - p_1 q_2); \\ \frac{\partial p_1}{\partial \tau} = & -\gamma_0 p_1 + \Delta\omega q_1 + k_1 v_0 p_2 - \frac{1}{2}k_1 v_1 q_2 + \\ & + \frac{1}{8}(p_2^2 + q_2^2)q_1 + \frac{p_2}{4}(p_2 q_1 - p_1 q_2); \\ \frac{\partial q_2}{\partial \tau} = & -\gamma_0 q_2 - \Delta\omega p_2 - k_2 v_0 q_1 - \frac{1}{2}k_2 v_1 p_1 - \\ & - \frac{k_2}{8k_1}(p_1^2 + q_1^2)p_2 - \frac{k_2 q_1}{4k_1}(p_2 q_1 - p_1 q_2); \\ \frac{\partial p_2}{\partial \tau} = & -\gamma_0 p_2 + \Delta\omega q_2 - k_2 v_0 p_1 - \frac{1}{2}k_2 v_1 q_1 + \\ & + \frac{k_2}{8k_1}(p_1^2 + q_1^2)q_2 - \frac{k_2 p_1}{4k_1}(p_2 q_1 - p_1 q_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Исследуем устойчивость стационарных режимов колебаний системы для нелинейных дифференциальных уравнений (14) при $v_0 = 0$.

Рассмотрим два случая.

1. *Случай отсутствия демпфирования* ($\gamma_0 = 0$). Для системы (14) существуют 17 стационарных режимов, представимых в аналитическом виде:

$$q_{10}^{(1)} = p_{10}^{(1)} = q_{20}^{(1)} = p_{20}^{(1)} = 0;$$

$$q_{10}^{(2,3)} = q_{20}^{(2,3)} = 0, p_{10}^{(2,3)} = \mp \lambda_1, p_{20}^{(2,3)} = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_1;$$

$$q_{10}^{(4,5)} = q_{20}^{(4,5)} = 0, p_{10}^{(4,5)} = \pm \lambda_2, p_{20}^{(4,5)} = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_2;$$

$$p_{10}^{(6,7)} = p_{20}^{(6,7)} = 0, q_{10}^{(6,7)} = \pm \lambda_1, q_{20}^{(6,7)} = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_1;$$

$$p_{10}^{(8,9)} = p_{20}^{(8,9)} = 0, q_{10}^{(8,9)} = \mp \lambda_2, q_{20}^{(8,9)} = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_2;$$

$$q_{10}^{(10,11)} = \pm \lambda_3, p_{10}^{(10,11)} = \mp \lambda_5, q_{20}^{(10,11)} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_1,$$

$$p_{20}^{(10,11)} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_1;$$

$$q_{10}^{(12,13)} = \pm \lambda_4, p_{10}^{(12,13)} = \mp \lambda_6, q_{20}^{(12,13)} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_2,$$

$$p_{20}^{(12,13)} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_2;$$

$$q_{10}^{(14,15)} = \pm \lambda_3, p_{10}^{(14,15)} = \pm \lambda_5, q_{20}^{(14,15)} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_1,$$

$$p_{20}^{(14,15)} = \mp \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_1$$

$$q_{10}^{(16,17)} = \pm \lambda_4, p_{10}^{(16,17)} = \pm \lambda_6, q_{20}^{(16,17)} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_2,$$

$$p_{20}^{(16,17)} = \mp \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \lambda_2,$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{2k_1 \sqrt{-2\Delta\omega \pm v_1 \sqrt{k_1 k_2}}}{\sqrt{k_1 k_2}};$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{(\pm 4\Delta\omega + v_1 \sqrt{k_1 k_2}) k_1 \sqrt{-12\Delta\omega \pm 6v_1 \sqrt{k_1 k_2}}}{3(4\Delta\omega \sqrt{k_1 k_2} \pm v_1 k_1 k_2)};$$

$$\lambda_{5,6} = \frac{2k_1 \mp 8\Delta\omega^2 + 2\Delta\omega v_1 \sqrt{k_1 k_2} \pm v_1^2 k_1 k_2}{(4\Delta\omega \sqrt{k_1 k_2} \pm v_1 k_1 k_2) \sqrt{-12\Delta\omega \pm 6v_1 \sqrt{k_1 k_2}}}.$$

Исследование устойчивости этих стационарных режимов по Ляпунову сводится к линеаризации уравнений (14) около положений равновесия и анализа корней характеристического уравнения. Результаты исследования приведены в следующем числовом примере.

Рассматривается микромеханический гироскоп, резонатор которого представляет собой

стержни длиной $l = 20$ мм с прямоугольным сечением $b = 0,33$ мм и $h = 1$ мм, изготовленные из плавного кварца ($\rho = 2201$ кг/м³, $E = 73$ ГПа). При обобщенном моменте инерции $J = 3 \cdot 10^{-8}$ кг·м² с учетом совмещения частот собственных колебаний имеем $c = 254,9$ Н·м, $k_1 = 1,319$, $k_2 = 0,1013$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 92987$ рад/с (14,806 кГц).

Квадраты амплитуд стационарных колебаний равны

$$A^2 = (q_{10}^{(i)})^2 + (p_{10}^{(i)})^2, B^2 = (q_{20}^{(i)})^2 + (p_{20}^{(i)})^2, \quad (15)$$

где i – соответствующий стационарный режим.

На рисунке 2 приведены амплитудно-частотные характеристики $A(\Delta\omega)$ и $B(\Delta\omega)$, построенные при значении амплитуды угловой вибрации основания $v_1 = \frac{5}{3}$.

Устойчивые по Ляпунову стационарные амплитуды колебаний системы выделены на рис. 2 светлым, а неустойчивые – темным фоном. Из приведенных графиков можно сделать вывод, что для одного значения $\Delta\omega$ в системе существует несколько стационарных режимов,

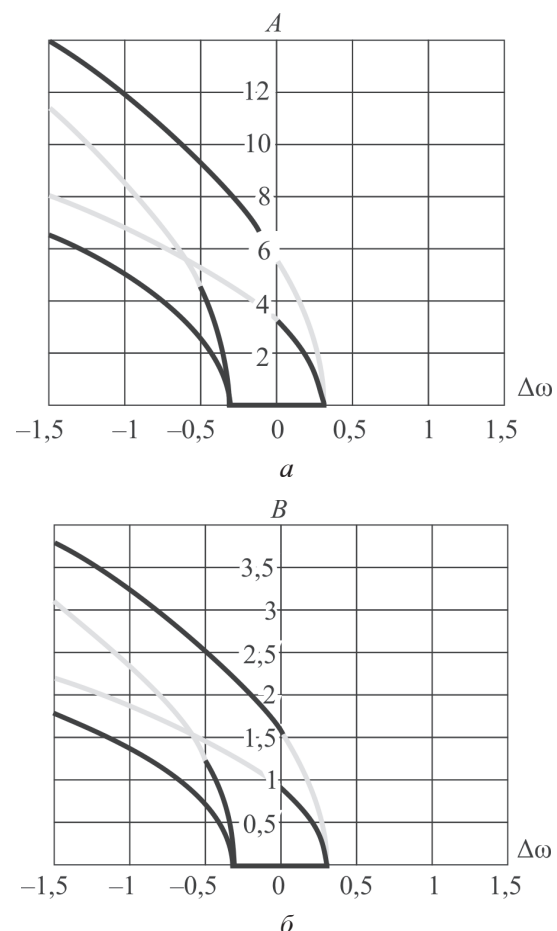


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики:

$a - A(\Delta\omega)$; $b - B(\Delta\omega)$;

— Устойчивость; — Неустойчивость

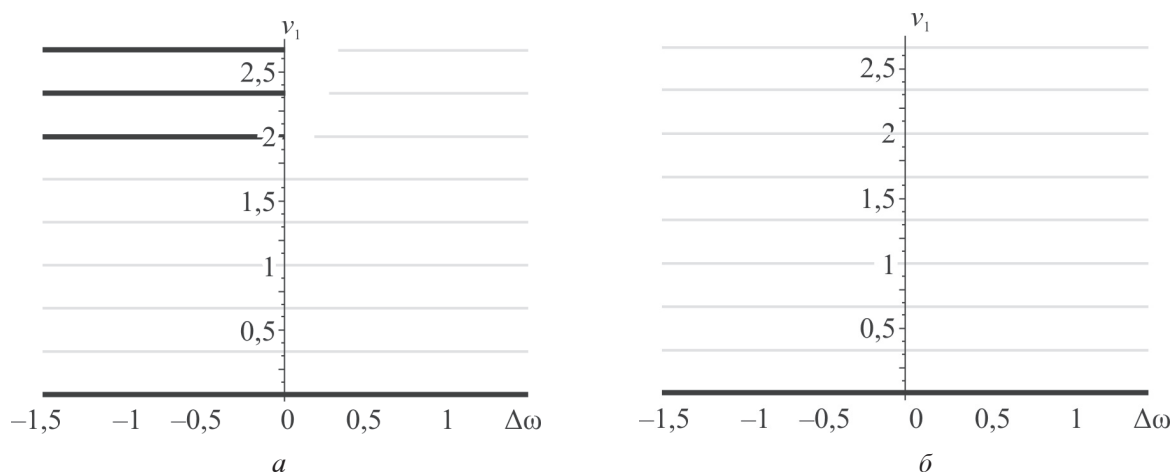


Рис. 3. Области устойчивости стационарных решений:
 $a - \gamma_0 = \frac{1}{3}$; $b - \gamma_0 = 1$; ■ Устойчивость; ■ Асимптотическая устойчивость

причем они могут быть как устойчивые, так и неустойчивые.

2. *Случай с демпфированием* ($\gamma_0 \neq 0$). Для системы с трением построены области устойчивости стационарных колебаний в пространстве параметров v_1 и $\Delta\omega$ (рис. 3) при значении коэффициентов вязкого трения $\gamma_0 = \frac{1}{3}$ (а) и $\gamma_0 = 1$ (б). Графики области устойчивости стационарных колебаний получены с помощью системы символьных вычислений *Maple 13*.

Асимптотически устойчивые по Ляпунову стационарные решения колебаний системы выделены на рис. 3 темным фоном, а устойчивые – светлым. Из приведенных графиков можно сделать вывод, что при изменении параметров системы устойчивые стационарные режимы могут стать неустойчивыми.

Заключение

Современные задачи приборостроения уже не ограничиваются одним лишь прецизионным исполнением МЭМС. Использование новых физических принципов и конструктивных схем приводит к необходимости учитывать внешние факторы среды и области применения: от точного позиционирования микрохирургического инструмента до колоссальных ускорений космических полетов. Поэтому построение математической модели нового микромеханического гироскопа, позволяющей определить область параметров прибора для его оптимального функционирования, является актуальной и важной задачей.

В работе данная задача решается в рамках исследования влияния вибрации основания на

устойчивость стационарных режимов. Установлено, что при отсутствии демпфирования в нелинейном случае существуют 17 стационарных режимов, представимых в аналитическом виде. При определенных частотах угловой вибрации, происходящей на частоте, близкой к главному параметрическому резонансу, существуют несколько стационарных режимов, которые могут быть как асимптотически устойчивыми, так и неустойчивыми. Показано, что для системы с демпфированием в пространстве параметров могут быть построены области асимптотической устойчивости стационарных режимов.

Список литературы

1. Астахов С.В., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Влияние конечных деформаций резонатора на динамику и точность микромеханического гироскопа камертонного типа // Вестник МЭИ. 2010. № 6. С. 148–154.
2. Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
3. Нейфэ А.Х. Методы возмущений. Пер. с англ. М.: Мир, 1976. – 456 с.
4. Распопов В.Я. Микромеханические приборы: учебное пособие. М.: Машиностроение, 2007. – 400 с.
5. Стретт Дж.В. (лорд Релей) Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 1–484 с.
6. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. – 733 с.

Материал поступил в редакцию 02.03.15

**СТЕПАНОВ
Алексей Сергеевич**

E-mail: steepanov@mail.ru
Тел.: +7 903 014 44 00

Магистрант кафедры теоретической механики и мехатроники Национального исследовательского университета «МЭИ». Сфера научных интересов: мехатроника и робототехника, теоретическая механика, гироскопия, навигация. Автор трех публикаций.

**СБЫТОВА
Екатерина Сергеевна**

E-mail: sbytovaes@ya.ru
Тел.: +7917-547-22-57

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теоретической механики и мехатроники Национального исследовательского университета «МЭИ». Сфера научных интересов: мехатроника и робототехника, теория колебаний и устойчивость движения, математическое моделирование технических систем, теоретическая механика, гироскопия. Автор трех научных статей, одного свидетельства о создании программы для ЭВМ.

**ПОДАЛКОВ
Валерий
Владимирович**

Тел.: +7 903-581-73-34

Доктор технических наук, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники Национального исследовательского университета «МЭИ». Сфера научных интересов: теория упругости; теоретическая механика; теория колебаний и устойчивость движения; методы математического моделирования, оценивания и управления механическими и биомеханическими системами; регулярная и хаотическая динамика механических систем; механика машин и роботов; механика технологических процессов; мехатроника и робототехника; теория, методы проектирования и эффективность функционирования технических систем; навигация, наведение и управление подвижными объектами; гироскопия. Автор одной монографии, более 100 научных статей.