

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ УЧЕТЕ ДИССИПАЦИИ ПО МОДЕЛИ СУХОГО ТРЕНИЯ

А.И. Муницын

Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях материальной точки на плоскости. Точка закреплена с помощью шести невесомых линейных пружин. Возбуждение колебаний создается гармонической силой, направление которой совпадает с одной из координатных осей. Взаимодействие между точкой и плоскостью учитывается по модели сухого трения. Решение получено методом усреднения. Обнаружено несколько устойчивых режимов колебаний. Выявлены некоторые особенности решений, характерные для модели сухого трения.

Ключевые слова: нелинейные колебания, сухое трение, основной резонанс, метод осреднения, взаимодействие между модами.

NONLINEAR OSCILLATIONS OF THE SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM ALLOWING FOR DISSIPATION USING THE MODEL OF DRY FRICTION

A. Munitsyn

The article considers the problem of forced oscillations of a material point on the plane. The point is fixed by six linear weightless springs. Excitation of oscillations is generated by harmonic force, the direction of which coincides with one of the coordinate axes. The interaction between the point and the plane is taken into account by using the model of dry friction. The solution has been obtained by asymptotic method. Several stable oscillation modes have been found. Some features of solutions specific to the model of dry friction have been detected.

Keywords: non-linearity oscillations, dry friction, principal resonance, asymptotic method, relation between the modes.

Введение

В работе рассматриваются вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы и одинаковыми значениями собственных частот. Линеаризованные уравнения, описывающие колебания системы, независимы между собой. Взаимодействие между координатами происходит за счет нелинейных слагаемых сил упругости.

Вынужденные колебания таких систем в окрестности главного резонанса достаточно подробно исследованы. При возбуждении ко-

лебаний в направлении одной из главных координат наличие нелинейного взаимодействия между колебаниями в разных направлениях приводит к возникновению колебаний вдоль координаты, ортогональной действию нагрузки. В одномодовом приближении к решению системы с двумя степенями свободы сводится задача о колебаниях струны с неподвижными опорами [1, 2] и с натяжным устройством [3], задача о колебаниях цилиндрической оболочки [4], стержня [5] и ряд других задач. Влияние малого различия собственных частот в таких

системах исследовалось в работах [5] и [6]. Нелинейное взаимодействие между различными формами колебаний существует также в задаче о движении твердого тела с упругими связями [7].

Во всех перечисленных работах диссипация либо не учитывается, либо используется модель вязкого трения. В последнее время большое внимание уделяется задачам исследования динамики систем с сухим трением [8]. При сложном движении такой системы модель сухого трения обнаруживает некоторые свойства, характерные для системы с вязким трением. Целью исследования данной работы является выявление таких свойств на достаточно простом примере. Полученные результаты могут быть интересны для специалистов в области машиностроения и станкостроения.

Постановка задачи

В качестве примера системы с двумя степенями свободы рассмотрим механическую систему, состоящую из материальной точки массой m , закрепленной с помощью шести невесомых линейных пружин одинаковой жесткости $c/3$ и длины R (рис. 1). Начало декартовой системы координат Ox_1x_2 совпадает с положением равновесия точки. Пружины равномерно распределены по окружности радиуса R в горизонтальной плоскости и соединяют материальную точку с основанием, образуя колебательную систему.

Сила деформации пружины, образующей угол α с осью x_1 , равна

$$P_k = \frac{c}{3} \left[\sqrt{(R \sin \alpha - x_1)^2 + (R \cos \alpha - x_2)^2} - R \right].$$

Ее проекции на оси x_1 и x_2 соответственно равны

$$P_{1k} = P_k \frac{R \sin \alpha - x_1}{\sqrt{(R \sin \alpha - x_1)^2 + (R \cos \alpha - x_2)^2}};$$

$$P_{2k} = P_k \frac{R \cos \alpha - x_2}{\sqrt{(R \sin \alpha - x_1)^2 + (R \cos \alpha - x_2)^2}}.$$

Суммируя по всем пружинам для $\alpha_k = \frac{\pi}{3}$, ($k = 1..6$) и оставляя в разложении в ряд Тейлора слагаемые не выше третьего порядка малости, получаем следующие значения сил упругости:

$$P_i = -cx_i + \frac{c}{8R^2}(x_1^2 + x_2^2)x_i, \quad i = 1, 2.$$

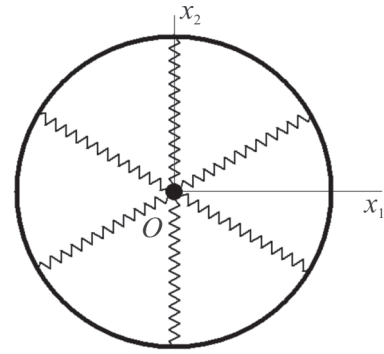


Рис. 1. Расчетная схема

Материальная точка соприкасается с шероховатой горизонтальной поверхностью, сила действующего на него сухого трения пропорциональна весу mg и направлена против вектора скорости

$$F_{mpi} = -kmg \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}, \quad i = 1, 2.$$

На массу m действует гармоническая сила с частотой θ и амплитудой F . Направление линии действия силы может быть произвольным.

Движение рассматриваемой системы описывается уравнениями (учитываются нелинейные слагаемые первого порядка малости):

$$m\ddot{x}_i + kmg \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} + cx_i - \frac{c}{8R^2}(x_1^2 + x_2^2)x_i = F_i \cos \theta t, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где k – коэффициент сухого трения.

Введем безразмерные переменные и следующие обозначения:

$$\tau = \sqrt{\frac{c}{m}}t = \omega_0^2 t, \quad \xi = \frac{x}{A};$$

$$\varepsilon = \left(\frac{A}{R}\right)^2, \quad \varepsilon\eta = \frac{kg}{\omega_0^2 A}, \quad \varepsilon f_i = \frac{F_i}{cA}, \quad \mu = \frac{\theta}{\omega_0},$$

где A – характерная амплитуда колебаний.

Уравнения (1) запишутся в виде

$$\ddot{\xi}_i + \varepsilon\eta \frac{\dot{\xi}_i}{\sqrt{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2}} + \xi_i - \frac{\varepsilon}{8}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\xi_i = \varepsilon f_i \cos \mu t, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Теперь точками обозначается дифференцирование по безразмерному времени τ . Параметр нелинейности системы при $A \ll R$ можно считать малой величиной. Кроме того,

амплитуды силы возбуждения колебаний f_1, f_2 и безразмерный коэффициент сухого трения η будем считать малыми, что позволяет воспользоваться методом осреднения [9, 10].

Колебания в окрестности главного резонанса

Представим систему уравнений (2) в стандартной форме при помощи перехода к медленным переменным

$$\xi_i = a_i \cos(\mu\tau + \beta_i), \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где a_i – амплитуды парциальных колебаний; β_i – фазовые добавки.

Колебания рассматриваются в малой окрестности единичной частоты $\mu = 1 + \varepsilon\lambda$.

Применяя метод осреднения, получаем систему уравнений в медленных переменных:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= \varepsilon\eta B_i - \frac{1}{64}\varepsilon a_1^i a_2^{3-i} \sin 2(\beta_i - \beta_{3-i}) + \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon f_i \sin \beta_i; \\ \dot{\beta}_i &= -\varepsilon\lambda + \varepsilon \frac{\eta E_i}{a_i} - \frac{3}{64}\varepsilon a_i^2 - \\ &- \frac{1}{64}\varepsilon a_{3-i}^2 (2 + \cos 2(\beta_1 - \beta_2)) - \frac{1}{2a_i}\varepsilon f_i \cos \beta_i, \\ i &= 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} B_i &= B_i(a_1, a_2, \beta_1, \beta_2) = \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 \tau d\tau}{\sqrt{\sin^2 \tau + \frac{a_{3-i}^2}{a_i^2} \sin^2(\tau + \beta_{3-i} - \beta_i)}}; \\ E_i &= E_i(a_1, a_2, \beta_1, \beta_2) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin 2(\tau) d\tau}{\sqrt{\sin^2 \tau + \frac{a_{3-i}^2}{a_i^2} \sin^2(\tau + \beta_{3-i} - \beta_i)}}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Интегралы $B_i(a_1, a_2, \beta_1, \beta_2)$, $E_i(a_1, a_2, \beta_1, \beta_2)$ могут быть получены в аналитическом виде только в отдельных частных случаях. На рисунках 2 и 3 приведены зависимости $B_1(a_1/a_2)$, $E_1(a_1/a_2)$, полученные численным интегрированием для различных значений $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$. При увеличении отношения амплитуд a_1/a_2 , т.е. при $a_2 \ll a_1$, интеграл B_1 возрастает и стремится к предельному значению $2/\pi$, а интеграл E_1 стремится к нулевому значению независимо от разности фаз решений $\Delta\beta$. Этот случай соответствует колебанию системы с одной степенью свободы и сухим трением [8].

При малых значениях отношения амплитуд a_1/a_2 зависимость $B_1(a_1/a_2)$ является линейной, что характерно для систем с вязким или преобразованным сухим трением. Линейный участок особенно заметен для $\Delta\beta = 0$, т.е. при движении материальной точки по прямой. При увеличении разности фаз осредненная сила трения возрастает и достигает максимального значения при $\Delta\beta = \pi/2$.

Разность фаз решений гораздо сильнее влияет на значение интеграла E_1 (см. рис. 3). При значениях $\Delta\beta = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \dots$ $E_1 \equiv 0$ независимо от значений амплитуд a_1 и a_2 . В этом случае траектория движения точки является прямой линией либо эллипсом, главные оси которого совпадают с осями координат. Во всех остальных случаях значение интеграла отлично от нуля. При учете диссипации по модели вязкого трения интегралы E_1, E_2 тождественно равны нулю при любых значениях параметров задачи. Зависимости $B_2(a_2/a_1)$, $E_2(a_2/a_1)$ совпадают с приведенными на рисунках 2, 3 при замене $\Delta\beta$ на $-\Delta\beta$. Установившиеся колебания соответствуют стационарному режиму $\dot{a}_i = 0, \dot{\beta}_i = 0, i = 1, 2$.

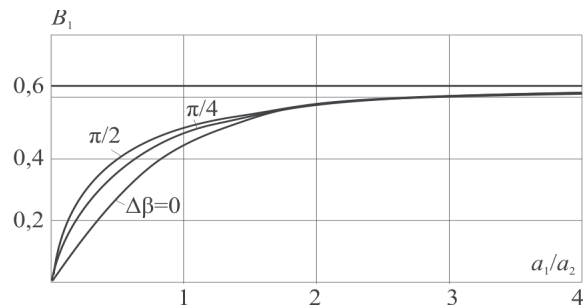


Рис. 2. Зависимости $B_1(a_1/a_2)$ для различных значений $\Delta\beta$

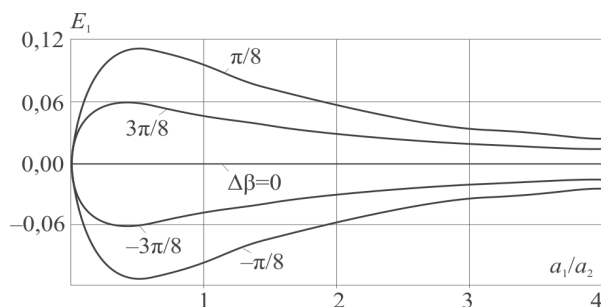


Рис. 3. Зависимости $E_1(a_1/a_2)$ для различных значений $\Delta\beta$

Ограничимся рассмотрением установившихся вынужденных колебаний в окрестности главного резонанса. Система нелинейных алгебраических уравнений (4) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \eta B_i - \frac{1}{64} a_1^i a_2^{3-i} \sin 2(\beta_i - \beta_{3-i}) + \frac{1}{2} f_i \sin \beta_i &= 0, \\ -\lambda + \frac{E_i}{a_i} - \frac{3}{64} a_i^2 - \frac{1}{64} a_{3-i}^2 (2 + \cos 2(\beta_1 - \beta_2)) - & \\ - \frac{1}{2a_i} f_i \cos \beta_i &= 0, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (6)$$

Численное решение этой системы может быть получено методом продолжения решения по параметру [11].

Пусть для системы уравнений $U_i(r, \lambda) = 0$ при некотором значении λ^k известно приближенное решение $r^k = (a_1^k, a_2^k, \beta_1^k, \beta_2^k)^T$. Тогда для значения $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta\lambda$ приближенное решение представляется в виде $r^{k+1} = r^k + \Delta r$. Подставляя в систему (4) и линеаризуя полученные уравнения, определяем приращения неизвестных из системы

$$\mathbf{G} \Delta r = \mathbf{p}^k + \mathbf{R}^k, \quad \mathbf{p}^k = (0, 0, \lambda^k, \lambda^k)^T, \quad (7)$$

где $\mathbf{R}^k$ – вектор невязки на предыдущем шаге решения; элементы матрицы $\mathbf{G}$ имеют вид $g_{ij} = dU_i/dr_j$.

Знак действительной части всех собственных значений матрицы $\mathbf{G}$ позволяет сделать вывод об устойчивости решения.

Предложенный алгоритм успешно применялся к решению подобной задачи с учетом вязкого трения [5]. Учет диссипации по модели сухого трения приводит к необходимости численного вычисления интегралов (5) на каждом шаге, а также интегралов, являющихся частными производными от B_i, E_i по медленным переменным $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2$. Решение системы нелинейных уравнений (4) сводится к решению последовательности систем линейных уравнений (6). На каждом шаге вычислений контролируется величина невязки. В точках ветвления решений за независимый параметр принимается переменная с наибольшим по модулю приращением на предыдущем шаге, что позволяет найти все существующие решения и построить многозначные зависимости амплитуд и фаз от частотной расстройки.

Решение, соответствующее колебаниям массы m вдоль линии действия нагрузки, может быть получено в аналитическом

виде. При нулевых значениях a_2 интегралы $B_1 = 2/\pi$, $E_1 = 0$, и для системы с одной степенью свободы первое и третье уравнение системы (6) принимают вид:

$$\eta \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \beta_1 = 0, \quad -\lambda - \frac{3}{64} a_1^2 - \frac{\cos \beta_1}{2a_i} = 0.$$

Их решением является

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 &= -\frac{4\eta}{\pi}, \quad \lambda = -\frac{3}{64} a_1^2 - \\ - \frac{\cos \beta_1}{2a_i} &= -\frac{3}{64} a_1^2 \pm \frac{1}{2a_i} \sqrt{1 - \frac{16\eta^2}{\pi^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Значение фазовой добавки β_1 не зависит от частотной расстройки. Решение (8) существует при выполнении условия $\eta \leq \pi/4$. Зависимость $a_1(\lambda)$ прилегает к скелетной кривой $\lambda = -3a_1^2/64$. При положительном значении $\cos \beta_1$ имеем дорезонансные колебания системы, при отрицательном – зарезонансные. Исследование устойчивости решения (8) сводится к нахождению собственных значений матрицы размерностью 2×2

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cos \beta_1 \\ -\frac{3}{32} a_1 + \frac{1}{2a_1^2} \cos \beta_1 & \frac{1}{2a_1} \cos \beta_1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\sin \beta_1 < 0$, то при $\cos \beta_1 < 0$, т.е. для зарезонансных колебаний, решение устойчиво всюду. Для дорезонансных колебаний ($\cos \beta_1 > 0$) решение устойчиво при выполнении условия

$$a_1 < \sqrt[3]{\frac{16}{3} \left(1 - \frac{16}{\pi^2} \right)}.$$

Резонансные колебания неограниченно возрастают, что типично для систем с сухим трением.

Максимальные амплитуды резонансных колебаний можно оценить из условия энергетического баланса.

Работа силы возбуждения на периоде колебаний:

$$\begin{aligned} A_f &= \int_0^{2\pi/\mu} f_1 \cos \mu t \cdot \dot{\xi}_1 dt = \\ &= f_1 a_1 \mu \int_0^{2\pi/\mu} \cos \mu t \cdot \sin(\mu t + \beta_1) dt = \pi f_1 a_1 \sin \beta_1. \end{aligned}$$

Работа сил трения на периоде колебаний при движении вдоль линии возбуждения:

$$A_{\eta} = \int_0^{2\pi/\mu} \eta \operatorname{sign} \dot{\xi} \cdot \dot{\xi}_1 dt = \\ = \eta a_1 \mu \int_0^{2\pi/\mu} \operatorname{sign}(\sin(\mu t + \beta_1)) \cdot \sin(\mu t + \beta_1) dt = 4\eta a_1.$$

Работа сил трения на периоде колебаний при движении по окружности ($a_1 = a_2$, $\beta_2 = \beta_1 + \pi/2$):

$$A'_{\eta} = \int_0^{2\pi/\mu} \left(\eta \frac{\dot{\xi}_1}{\sqrt{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2}} \cdot \dot{\xi}_1 + \eta \frac{\dot{\xi}_2}{\sqrt{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2}} \cdot \dot{\xi}_2 \right) dt = \\ = 2\eta a_1 \mu \int_0^{2\pi/\mu} \sin^2(\mu t + \beta_1) dt = 2\pi\eta a_1.$$

Из условия баланса энергии получаем, что колебания в системе с сухим трением возможны при выполнении условия $\eta < \frac{\pi}{4} f_1$, а движение тела по окружности возможно при условии $\eta < \frac{1}{2} f_1$.

Результаты численного моделирования

Результаты численного решения системы уравнений (6) приведены на рис. 4 и 5 в виде зависимостей амплитуд a_1 , a_2 и фаз колебаний β_1 , β_2 от частотной расстройки λ . Значения амплитуд возбуждения колебаний $f_1 = 2$, $f_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ соответствуют возбуждению вдоль оси x_1 ; амплитуда силы f_2 принята на три порядка меньше f_1 , поскольку на практике реализовать возбуждение колебаний строго вдоль прямой линии невозможно.

Пунктирными линиями обозначены две скелетные кривые, уравнения которых получаются из системы (6). Первая кривая $\lambda = -3a_i^2/64$, $i=1,2$ соответствует колебаниям точки вдоль одной из осей координат (одна из амплитуд тождественно равна нулю), вторая $\lambda = -a_i^2/16$, $i=1,2$ соответствует движению точки по окружности ($a_1 = a_2$, $\beta_1 - \beta_2 = \pm\pi/2$). Существование второй скелетной кривой является следствием нелинейного взаимодействия форм колебаний системы [2].

Жирными линиями обозначены устойчивые решения. Кривыми 1, 2 обозначены зависимости $a_1(\lambda)$ и $\beta_1(\lambda)$, $\beta_2(\lambda)$, описывающие колебания материальной точки вдоль линии возбуждения. Этому решению для $a_2 \ll a_1$ соответствует жирная линия на рис. 3, совпадающая с осью абсцисс.

Приведенные на рис. 4, 5 зависимости $a_1(\lambda)$ и $\beta_1(\lambda)$ (кривые 1, 2), полученные в результате численного решения системы уравнений (6), совпадают с (8). Различие заключается в существовании точки A (C), разделяющей кривую 2 на устойчивый и неустойчивый участки. Для системы с одной степенью свободы решение, соответствующее кривой 2 на рис. 4 и 5, является устойчивым всюду. Учет возмущений в направлении, ортогональном линии действия динамической нагрузки, приводит к неустойчивости рассматриваемого решения в области больших амплитуд колебаний.

Точка, в которой происходит смена устойчивости, является также точкой ветвления решений. Принимая ее за начальную точку, методом продолжения решения по параметру найдено еще два решения, обозначенные на рис. 4 кривыми 3 (зависимость $a_1(\lambda)$) и 4 (зависимость $a_2(\lambda)$), выходящими из точек A и B. На рисунке 5 кривыми 3 и 4 обозначены зависимости $\beta_1(\lambda)$

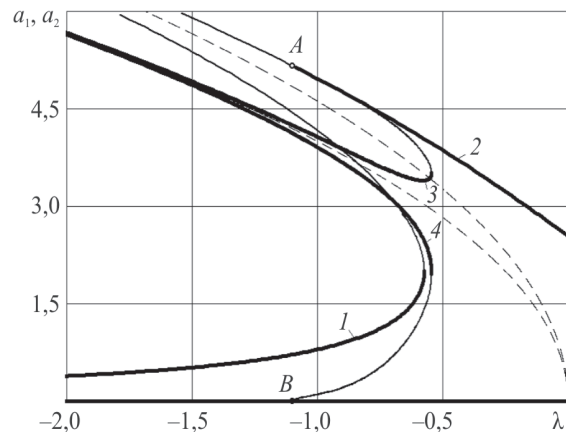


Рис. 4. Зависимости амплитуд колебаний от частотной расстройки

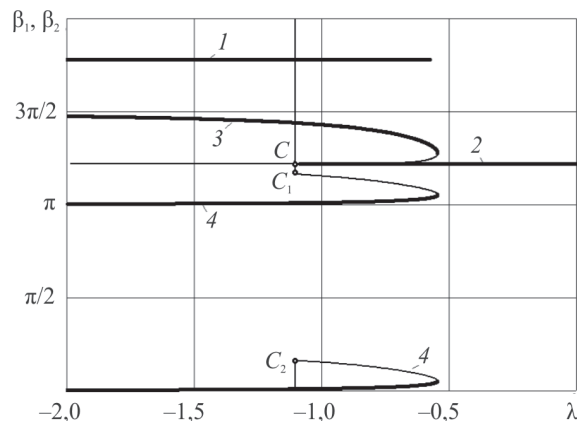


Рис. 5. Зависимости фаз колебаний от частотной расстройки

и $\beta_2(\lambda)$. Кривая 4 имеет две ветви, выходящие из точки C и проходящие через точки C_1 и C_2 , различающиеся между собой на величину π . Эти два решения представляют собой движение материальной точки в плоскости Ox_1x_2 по эллипсу в двух противоположных направлениях. При увеличении амплитуд колебаний $a_1 = a_2$, $\beta_1 - \beta_2 = \pm\pi/2$ и колебания точки происходят по окружности. В этом предельном случае интегралы $B_i(a_1, a_2, \beta_1, \beta_2)$, $E_i(a_1, a_2, \beta_1, \beta_2)$, входящие в систему уравнений (6), принимают вид: $B_1 = B_2 = 1/2$, $E_1 = E_2 = 0$. На этом резонансе колебания также неограниченно возрастают.

Заключение

Установлено, что при возбуждении колебаний гармонической силой, направление которой совпадает с одной из координатных осей, в рассматриваемой системе существует несколько установившихся режимов колебаний. Это могут быть колебания вдоль линии действия нагрузки и колебания материальной точки в плоскости Ox_1x_2 по эллипсу в двух противоположных направлениях, что является следствием нелинейного взаимодействия между движениями точки в разных направлениях. При учете диссипации по модели сухого трения амплитуды резонансных колебаний неограниченно возрастают, при этом точка движется по окружности.

В отличие от систем с вязким трением, в которых переход с колебаний вдоль линии действия нагрузки на колебания в плоскости происходит плавно [1, 3, 5], в системе с сухим трением этот переход происходит скачком. Существует достаточно большой диапазон частот, в котором возможны сразу четыре режима движения системы: колебания точки вдоль линии возбуждения с «большой» и «малой» амплитудами и два режима движения точки по эллипсу, отличающиеся направлением движения.

Список литературы

1. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Вынужденные нелинейные колебания струны // Известия РАН. Механика твердого тела. 1996. № 1. С. 17–24.
2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Нелинейные колебания струны // Известия РАН. Механика твердого тела. 1993. № 4. С. 87–92.
3. Муницын А.И. Нелинейные колебания нити с натяжным устройством // Известия РАН. Механика твердого тела. 2001. № 2. С. 24–30.
4. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснополянская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек Киев: Наукова Думка, 1984. – 220 с.
5. Муницын А.И. Нелинейные колебания стержня с близкими значениями осевых моментов инерции поперечного сечения // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 3. С. 427–438.
6. Ладыгина Е.В., Маневич А.И. Свободные колебания нелинейной кубической системы с двумя степенями свободы при близких собственных частотах // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 40–49.
7. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. – 432 с.
8. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая механика», Институт компьютерных исследований, 2010. – 184 с.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. – 503 с.
10. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. – 535 с.
11. Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л. Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.

Материал поступил в редакцию 31.03.15

МУНИЦЫН Александр Иванович

E-mail: munitsyn@rambler.ru
Тел.: 8-985-396-01-42

Доктор технических наук, доцент, профессор кафедры динамики и прочности машин НИУ «Московский энергетический институт». Сфера научных интересов: динамика и прочность машин, нелинейные колебания. Автор двух монографий, 35 статей.