

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМБИНИРОВАННОГО ЩЕТОЧНОГО УПЛОТНЕНИЯ

Ю.М. Темис, А.В. Селиванов, И.Ю. Дзева

*В работе представлена математическая модель комбинированного щеточного уплотнения. Взаимосвязь между положением элементов уплотнения и распределением давления протекающего газа потребовала решения многодисциплинарной задачи статической аэроупругости для определения рабочего зазора и утечки газа. Для решения использован итерационный алгоритм, расчетные модули которого основаны на разработанных упрощенных моделях. Упругий элемент уплотнения представлен в виде абсолютно жесткой колодки на гибком подвесе. Подъемная сила газового потока, действующая на упругий элемент, вычислена на основе решения двумерного уравнения Рейнольдса для газовой смазки. Адекватность применения упрощенных моделей подтверждена результатами поверочного трехмерного моделирования. Показано существенное влияние наклона колодок на величину подъемной силы.*

**Ключевые слова:** комбинированное щеточное уплотнение, аэроупругость, математическое моделирование, уравнение Рейнольдса.

## MATHEMATICAL MODEL OF THE HYBRID BRUSH SEAL

J.M. Temis, A.V. Selivanov, I.J. Dzeva

*Multidisciplinary mathematical model of a hybrid brush seal is presented. Dependence of the gas pressure distributions and seal elements position requires static aeroelasticity problem to be solved in order to obtain the operating clearance and gas leakage. Iterative approach based on the developed simplified structure and flow models is applied. The seal compliant element is considered as an absolutely rigid pad attached to an elastic support. Gas flow model based on the 2D Reynolds equation is used to compute gas lifting force acting on the compliant elements. Both fast simplified models are verified by comparing with the detailed 3D simulation results. It is shown that pad inclination has significant influence on the lifting force.*

**Keywords:** hybrid brush seal, aeroelasticity, mathematical simulation, Reynolds equation

### Введение

Уплотнения применяют для уменьшения утечки газа через зазоры между вращающимися и неподвижными деталями турбомашин. Наиболее распространены лабиринтные уплотнения, которые за счет своей формы (чередование гребешков и камер) создают повышенное гидравлическое сопротивление, что препятствует перетоку газа из области высокого давления в область низкого давления.

Величина утечки газа через лабиринтное уплотнение пропорциональна величине зазора над гребешками, и установка минимального зазора позволяет обеспечить высокую степень герметизации. Однако деформация деталей уплотнительного узла под действием переменных тепловых и силовых нагрузок в компрес-

соре газотурбинного двигателя может приводить к изменению рабочего зазора на величину до 1,0 мм.

В результате на протяжении большей части рабочего цикла двигателя лабиринтное уплотнение работает с избыточным зазором, что существенно снижает его эффективность.

В отличие от «жестких» лабиринтных уплотнений особенностью перспективных податливых уплотнений является обеспечение гарантированно малого зазора и малой утечки газа на различных режимах работы двигателя. В таких конструкциях внешнее изменение зазора компенсируется смещением упругих элементов под действием газовых сил. По приведенным оценкам, применение новых высокоэффективных уплотнений с гибкими эле-

ментами в авиационных двигателях позволит повысить тягу и снизить расход топлива на 2-4 % [1].

Одним из перспективных бесконтактных уплотнений является комбинированное щеточное уплотнение. Известны результаты стендовых испытаний комбинированного щеточного уплотнения, для изготовления подвеса которого был использован метод электроэрозионной обработки [2]. Проведенные испытания подтвердили бесконтактный режим работы и снижение утечки газа в два и более раза по сравнению со стандартным лабиринтным уплотнением.

Целью данной работы является разработка математической модели для проектирования и оптимизации конструкции комбинированного щеточного уплотнения.

### Расчетная схема уплотнения

Принцип работы комбинированного щеточного уплотнения (рис. 1) заключается в балансировке надроторного кольца, состоящего из сегментных колодок, под действием подъемной силы газового потока [2, 3].

Колодки крепятся в корпусе при помощи упругого подвеса, который обладает малой жесткостью в радиальном направлении. Жесткость подвеса в осевом направлении большая, что позволяет использовать это уплотнение между областями с большим перепадом давления газа.

Для предотвращения прямой утечки газа через подвес перед ним размещают типовое щеточное уплотнение. При этом поверхности, между которыми устанавливают щеточное уплотнение, имеют нулевую относитель-

ную скорость вращения. Это уменьшает износ щетинок и позволяет многократно повысить ресурс уплотнительного узла. Кроме того, такая конструкция, в отличие от стандартного щеточного уплотнения, допускает реверсивное вращение ротора, а щетинки вносят дополнительное демпфирование в систему.

Для обеспечения работоспособности и высокой эффективности комбинированного щеточного уплотнения необходимо обеспечить балансировку колодок на тонкой газовой пленке над ротором. Балансировка осуществляется под действием газостатических (определяемых осевым перепадом давления) и газодинамических (индуцированных вращением ротора) подъемных сил. Общая схема балансировки и характерные эпюры сил давления газа показаны на рис. 2. Введем следующие обозначения:  $p$  – давление газа;  $p_{вх}$  – давление газа в области перед уплотнением;  $p_{вых}$  – давление газа в области после уплотнения;  $p_c$  – давление газа в промежуточной балансировочной полости;  $F_{щ}$ ,  $F_{щ1}$ ,  $F_{щ2}$  – силы упругой реакции щетины щеточных уплотнений;  $F_{п}$  – сила упругой реакции подвеса.

Для поддержания гарантированно малого рабочего зазора необходим согласованный выбор ряда конструктивных параметров уплотнения. Так, профилирование внутренней поверхности колодки позволяет управлять распределением давления газа под ней и, соответственно, величиной подъемной силы. Газостатическая составляющая суммарной подъемной силы также может быть изменена за счет смещения щеточного уплотнения,

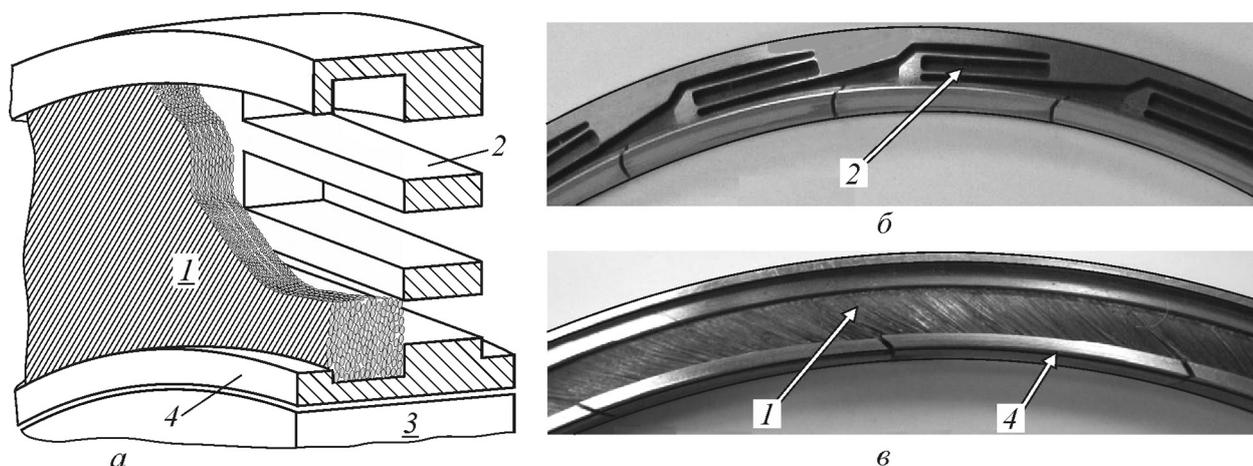


Рис. 1. Комбинированное щеточное уплотнение:

$a$  – общая схема;  $b$  – вид со стороны низкого давления;  $в$  – вид со стороны высокого давления;  $1$  – вторичное щеточное уплотнение;  $2$  – упругий подвес;  $3$  – ротор;  $4$  – сегментное кольцо

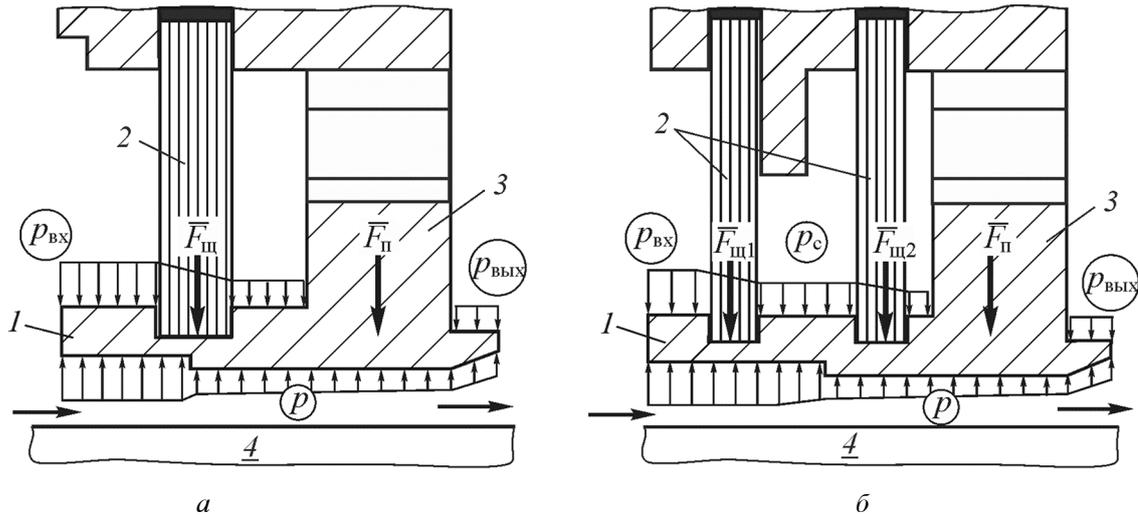


Рис. 2. Схема балансировки комбинированного щеточного уплотнения:

*a* – типовая конструкция; *б* – конструкция с двумя рядами щеток;

1 – колодка с профилированной внутренней поверхностью;

2 – щеточное уплотнение; 3 – упругий подвес; 4 – ротор

в том числе при его переносе за упругий подвес. В ряде случаев возможна установка второго щеточного уплотнения (см. рис. 2, б) для создания промежуточной балансировочной полости над колодкой и снижения утечки газа через подвес [3]. Изменение формы подвеса позволяет регулировать его радиальную и осевую жесткость (силу упругости  $F_{п}$ ), а изменение жесткости щеточного уплотнения, угла наклона и начального натяга щетинок – регулировать силу упругости щетины  $F_{щ}$ .

Учитывая широкий спектр возможных конструктивных решений, проектирование комбинированного щеточного уплотнения для заданных условий эксплуатации целесообразно проводить на основе математической модели уплотнительного узла. При этом явная взаимозависимость между положением колодки (формой зазора) и распределением давления в протекающем потоке газа требует использования многодисциплинарного подхода и решения связанной задачи аэроупругости. Ключевые характеристики уплотнения (рабочий зазор и утечка) можно определить при статической постановке задачи. Однако, в общем случае, необходимо учитывать нестационарные эффекты, связанные с внешней кинетикой радиального зазора и изменением рабочих условий. Актуальными задачами являются оценка аэроупругой устойчивости колодок в потоке газа и определение циклической долговечности гибкого подвеса.

Уровень детализации математических моделей должен позволить рассмотреть большое

число конструктивных вариантов при сохранении приемлемой трудоемкости расчетов. При этом для щеточного уплотнения, которое в рассматриваемой конструкции является вторичным, уже разработано большое число упрощенных подходов и методов расчета. Поэтому основное внимание в работе уделено построению математической модели для анализа балансировки колодок на упругом подвесе под действием газостатических и газодинамических подъемных сил. Щеточное уплотнение рассматривается как упругое пористое основание, для расчета которого можно использовать известные модели [4, 5].

При выборе расчетной схемы приняты следующие допущения: основной вклад в балансировку вносит течение газа в зазоре между колодками и ротором; радиальные перемещения колодок не приводят к контакту между ними; контакт колодок и щеточного уплотнения считается плотным и равномерным.

Прецессия ротора и асимметричность внешнего корпуса в данной работе не рассматривались. В этих условиях все колодки займут одинаковое деформированное положение, и будет выполнена окружная циклическая (поворотная симметрия) рабочих зазоров. Следовательно, основные характеристики уплотнения (расход, величина рабочего зазора и др.) можно определить по результатам расчета одной колодки. В случае нарушения поворотной симметрии расположения колодок или газовых нагрузок необходимо рассмотреть набор колодок,

каждая из которых может быть рассчитана по приведенному далее алгоритму. Отметим, что независимость перемещений колодок позволяет уплотнению корректировать асимметричность радиального зазора.

Таким образом, расчетная схема уплотнения включает в себя (рис. 3): произвольно выбранную колодку 1 ( $A, B, C, D$  – угловые точки внутренней поверхности колодки) на упругом подвесе 2, консольно закрепленном по внешнему диаметру ( $E$  – центр сечения сопряжения колодки и подвеса,  $(\tau, \nu, \beta)$  – локальная система координат); тонкий газовый слой в зазоре между поверхностью ротора и внутренней поверхностью колодки; сектор щеточного уплотнения над колодкой.

Для построения твердотельной модели подвеса введена параметризация конструкции комбинированного щеточного уплотнения. При этом для щеточного уплотнения использована типовая схема параметризации [5]. Определяющие параметры показаны на рис. 4:  $d$  – внутренний диаметр колодки;  $L$  – окружная длина колодки;  $b$  – осевая длина колодки;  $H$  – толщина колодки;  $c$  – расстояние между соседними колодками;  $\gamma$  – угол скоса кромок колодки;  $r_1, r_2$  – радиусы закрепления верхней и нижней пластин подвеса;  $L_1, L_2$  – длины верхней и нижней пластин подвеса;  $t_1, t_2$  – толщины верхней и нижней пластин подвеса;  $\beta_1, \beta_2$  – углы наклона верхней и нижней пластин подвеса;

$b_{\text{подв}}$  – ширина пластин подвеса;  $b_{\text{щет}}$  – толщина щетины щеточного уплотнения;  $b_{\text{вх}}, b_{\text{вых}}$  – ширина свободной части колодки на входе в уплотнение и на выходе, соответственно. Жесткость подвеса можно регулировать выбором материала, изменением длин, толщин и ширины пластин подвеса. Перемещения колодки зависят также от месторасположения подвеса относительно цилиндрической части, которое определяется параметром  $b_{\text{вх}}$  (осевое положение) и углом  $\alpha$  (окружное положение).

### Математическая модель уплотнения

Предварительный анализ конструкции позволил представить упругий подвес уплотнения в виде гибкой части и абсолютно твердой цилиндрической колодки (см. рис. 3). Таким образом, положение колодки определяют шесть степеней свободы – перемещения  $\delta_r, \delta_v, \delta_\beta$  и углы поворота  $\theta_r, \theta_v, \theta_\beta$  сечения, в котором колодка сопряжена с подвесом. Адекватность этого допущения подтверждена результатами трехмерных расчетов (см. Приложение 2).

Газовые нагрузки, действующие на колодку, можно разделить на четыре группы: со стороны высокого давления  $p_{\text{вх}}$ ; со стороны низкого давления  $p_{\text{вых}}$ ; давление в зоне щеточного уплотнения  $p_{\text{шт}}$ ; давление в зазоре под колодкой  $p$  (см. рис. 2). Нагрузки первых трех групп определяются рабочими условиями и не изменяются при смещении колодки.

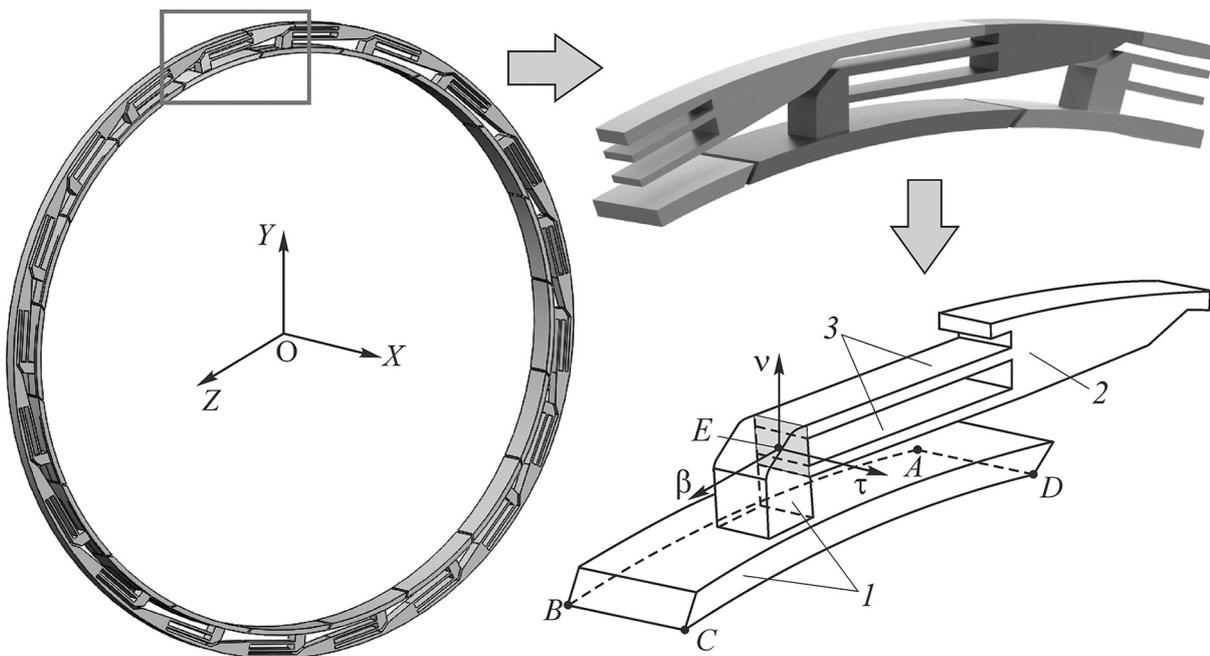


Рис. 3. Расчетная схема подвеса комбинированного щеточного уплотнения:

1 – абсолютно твердая колодка; 2 – податливое основание; 3 – гибкая часть подвеса

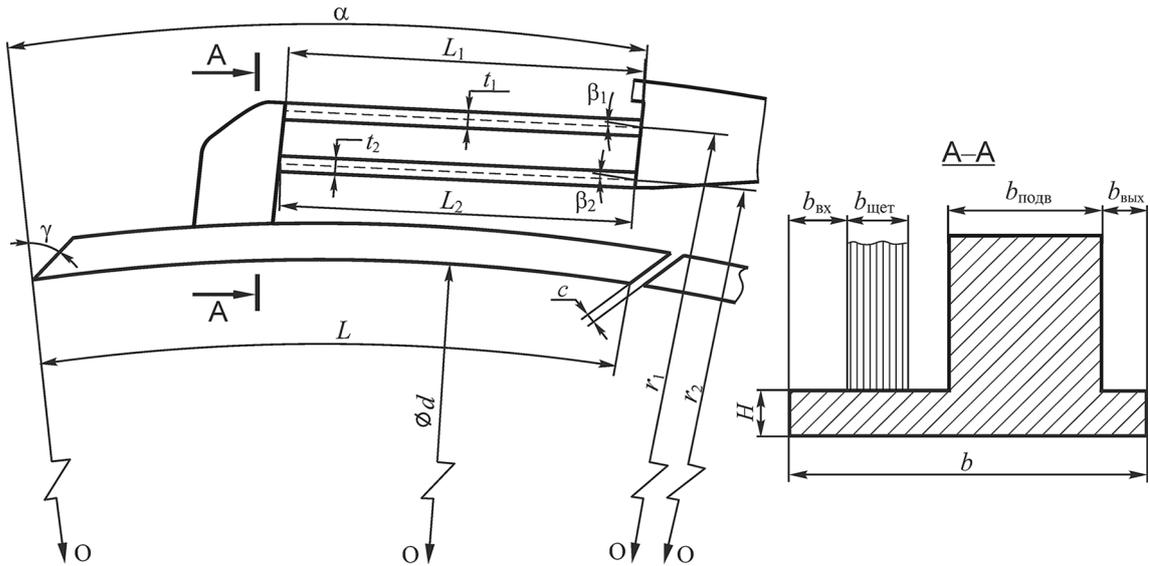


Рис. 4. Параметризация подвеса комбинированного щеточного уплотнения

Радиальные компоненты распределенных сил давления газа, с учетом допущения об абсолютной жесткости колодки, заменены системой равнодействующих сил  $\{\bar{R}_{\text{BK}}, \bar{R}_{\text{ВЫХ}}, \bar{R}_{\text{Щ}}, \bar{R}_{\text{К}}\}$ , точки приложения которых условно показаны на рис. 5. Равнодействующие силы  $R_{\text{BK}}, R_{\text{ВЫХ}}, R_{\text{Щ}}$  рассчитаны по соответствующим полям давления газа  $p_{\text{BK}}, p_{\text{ВЫХ}}, p_{\text{Щ}}$ . Величина подъемной силы в зазоре под колодкой  $R_{\text{К}}$  и точка ее приложения определены интегрированием нелинейного распределения давления газа  $p(z,s)$ , которое зависит от текущего положения колодки. Интегрирование ведется по локальным координатам  $z$  и  $s$  на развертке зазора. Осевые составляющие сил давления газа учтены аналогично.

Матричное уравнение, выражающее равновесие колодки в потоке газа, можно представить в виде:

$$\mathbf{K}_{\text{подв}} \mathbf{U} = \mathbf{R}_r(\mathbf{U}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{K}_{\text{подв}}$  – матрица эквивалентной жесткости упругого подвеса (с учетом жесткости щеточного уплотнения);  $\mathbf{R}_r(\mathbf{U})$  – вектор эквивалентной газовой нагрузки, составленный из компонент суммарной силы и момента, приведенный к центру сечения сопряжения колодки и гибкого подвеса  $E$ ;  $\mathbf{U} = \{\delta_\tau, \delta_\nu, \delta_\beta, \theta_\tau, \theta_\nu, \theta_\beta\}^T$  – вектор обобщенных координат.

Уравнение (1) является нелинейным, и для его решения использован итерационный подход. На каждой итерации последовательно выполняются:

- газодинамический модуль для вычисления распределения давления газа под колодкой с учетом текущей величины поправки к начальному зазору;
- модуль расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции под действием найденного распределения давления (согласно принципу началь-

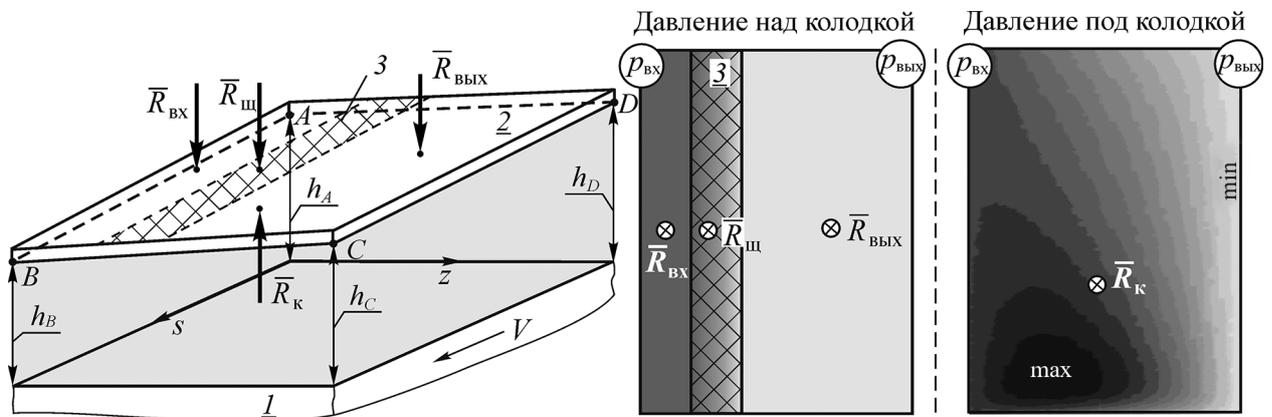


Рис. 5. Схема газовых нагрузок, действующих на колодку (масштабный фактор по осям изменен, зазор под колодкой увеличен для наглядности); 1 – ротор; 2 – колодка; 3 – зона контакта щетинок и колодки;  $h_A, h_B, h_C, h_D$  – величины зазора в угловых точках колодки;  $V$  – линейная скорость поверхности ротора

ных размеров, давление прикладывается к недеформированной конструкции);

- управляющий модуль для определения текущего зазора с учетом найденных перемещений и поворотов колодки и проверки сходимости алгоритма.

Блок-схема алгоритма решения уравнения (1) приведена на рис. 6. Распределение давления газа в зазоре на каждой итерации вычислялось по двумерной модели Рейнольдса, а напряженно-деформированное состояние колодки – по эквивалентной модели подвеса и колодки. Разработанные модели объединены при помощи управляющей программы в единую расчетную среду. В качестве критерия остановки итерационного процесса использован критерий сходимости по величине подъемной силы  $R_k$  (интегральный критерий по давлению). Описание математических моделей, положенных в основу соответствующих расчетных модулей, приведено в приложениях.

Модули могут выполняться как в рамках единой программы, так и по отдельности. В последнем случае газодинамический модуль и модуль расчета напряженно-деформированного состояния могут быть использованы для оценки различных конструктивных решений, направленных на изменение радиальной и осевой балансировки колодок, и для предварительной оптимизации конструкции. Добавление скоростного и инерционного слагаемых в уравнение (1) позволяет перейти к анализу динамики работы и оценки устойчивости уплотнения [6, 7].

### Результаты расчетов

Расчеты выполнены для уплотнения со следующими основными размерами: внутренний

диаметр  $d = 166,4$  мм; осевая длина колодки  $b = 9$  мм; окружная длина колодки  $L = 25,6$  мм (20 колодок в уплотнении); толщина колодки  $H = 1,5$  мм; ширина подвеса  $b_{\text{подв}} = 4$  мм (см. рис. 4). Подобное уплотнение было испытано авторами работы [3].

Результаты решения совместной задачи для комбинированного уплотнения с колодками, первоначально расположенными концентрично поверхности ротора (монтажный зазор 10 мкм), приведены на рис. 7. Рабочий зазор (см. рис. 7, б) имеет диффузорную форму в окружном направлении: «носик» колодки (кромка  $BC$ ) поднимается выше «пятки» (кромка  $AD$ ).

Расход газа под колодками рассмотренного комбинированного уплотнения (без учета протечки через щеточное уплотнение) составил 18 г/с. Выбором жесткости подвеса можно уменьшить рабочий зазор и, соответственно, величину расхода (утечки). Однако подобная оптимизация конструкции должна проводиться с учетом кинетики внешнего изменения зазора, зависящего от тепловых и инерционных нагрузок, действующих на детали уплотнительного узла.

Исследование установившегося течения газа под гладкими зафиксированными колодками при различных зазорах (рис. 8) показало, что диффузорная форма рабочего зазора является нежелательной. Расчеты проведены на основе решения двумерного уравнения Рейнольдса (см. Приложение 1) для концентричной и наклоненных по окружности колодок. Во втором случае моделировалось возникновение окружного газового клина в зазоре на рабочем режиме.

При относительно больших зазорах (несколько десятков микрон) наклон площадки

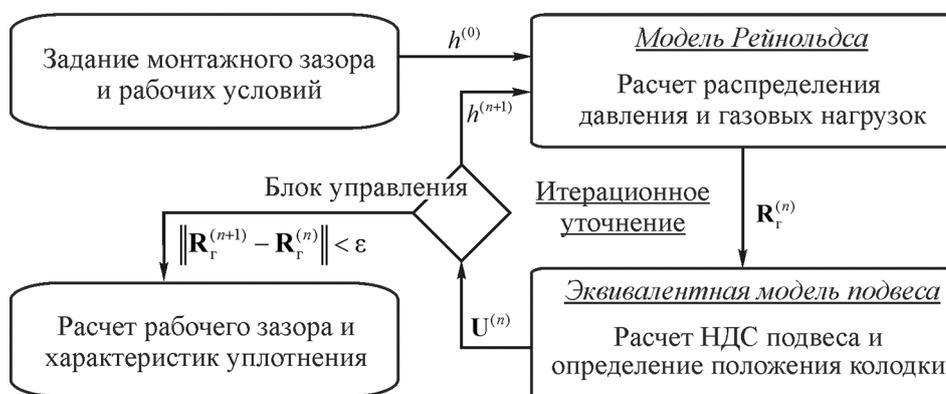


Рис. 6. Алгоритм итерационного решения задачи статической аэроупругости для комбинированного щеточного уплотнения:

$h^{(0)}$  – начальный зазор;  $h^{(n)}$  – текущий зазор;  $n$  – номер итерации;  $\epsilon$  – заданная погрешность

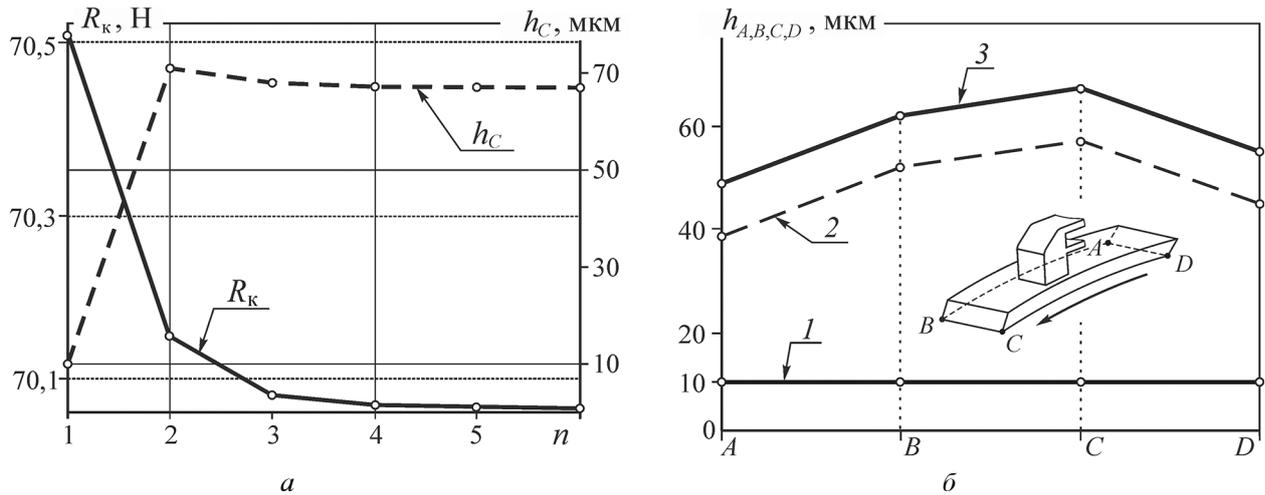


Рис. 7. Поиск рабочего (равновесного) положения колодки:

$a$  – график сходимости итерационного процесса;  $b$  – равновесное положение:  $R_k$  – подъемная сила;  $h_c$  – радиальный зазор в точке C;  $I$  – монтажный зазор; 2 – радиальные перемещения; 3 – рабочий зазор;  $n$  – номер итерации

незначительно влияет на распределение давления в газовом потоке; при этом распределение близко к осесимметричному. При «малых» зазорах наблюдается заметная несимметричность распределения давления, которая существенно зависит от наклона колодок.

Из данных рис. 8,  $a$  видно, что для колодки, расположенной концентрично ротору, величина подъемной силы  $R_k$  слабо меняется при изменении радиального зазора. Отчасти это связано с заданием статического давления на границах расчетной области.

Для зазора конфузурной формы (см. рис. 8,  $b$ ), при уменьшении его величины подъемная сила возрастает за счет возникновения газового подъемного клина. При этом колодка отклоняется при приближении ротора, что позволяет обеспечить требуемую газодинамическую балансировку уплотнения.

Реализация расходящегося клина (диффузорный зазор), наоборот, негативно сказывается на балансировке колодки. Кроме того, при малом зазоре отмечено возникновение прижимающей газодинамической силы, которая уменьшает величину суммарной подъемной силы (см. рис. 8,  $b$ ).

Полученные результаты следует учитывать при проектировании новой конструкции комбинированного уплотнения. Обеспечить конфузурный рабочий зазор можно соответствующим изменением монтажного зазора и изменением жесткости и месторасположения подвеса.

### Заключение

Разработка новых высокоэффективных уплотнений с гибкими элементами является одной из актуальных задач газотурбинного машиностроения. Совместно с конструкторской проработкой различных концепций должны быть созданы математические модели для расчета и оптимизации новых уплотнений.

Для рассмотренного в статье комбинированного щеточного уплотнения показана возможность регулирования зазора под действием газодинамических подъемных сил. Разработанная междисциплинарная модель может быть использована в дальнейшем для проектирования уплотнений с заданными рабочими характеристиками. Однако, в первую очередь, необходимы совершенствование модели для учета динамических эффектов и проведение полноценной верификации на основании стендовых испытаний.

### Список литературы

1. *Steinetz B.M., Hendricks R.C., Munson J.* Advanced seal technology role in meeting next generation turbine engine goals // NASA Glenn Research Centre Technical Memorandum: NASA/TM-1998-206961. - 11 p.
2. *Justak J.F., Crudginton P.F.* Evaluation of a film riding hybrid seal // Proc. 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit. Sacramento, California, 2006. AIAA Paper 2006-4932. - 9 p.
3. *San Andres L., Baker J., Delgado A.* Measurements of leakage and power loss in a hybrid brush seal // ASME Journal of Engineering

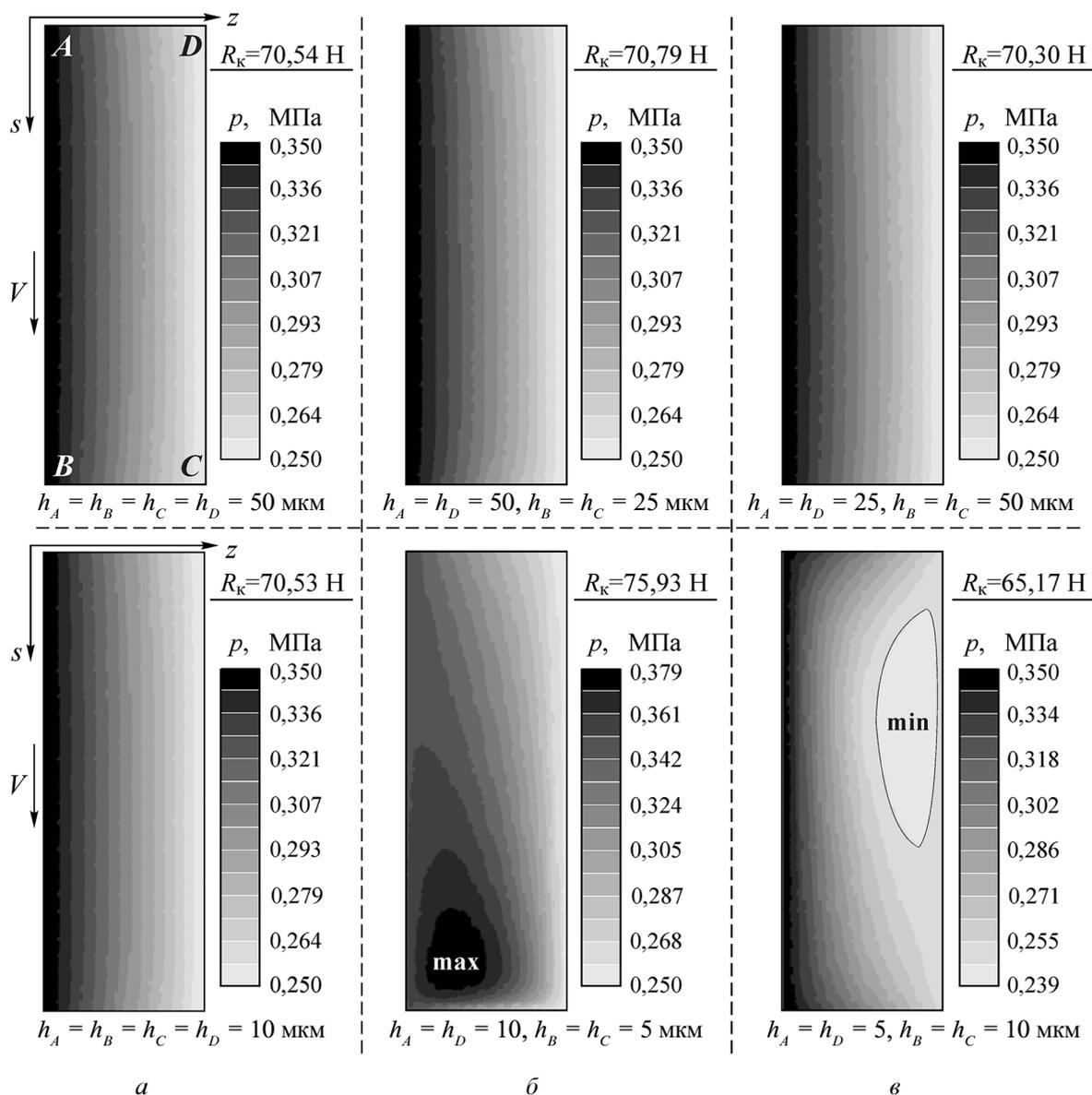


Рис. 8. Распределения давления газа (МПа) в зазоре под колодкой при линейной скорости поверхности ротора  $V = 83$  м/с и температуре газа  $T = 300$  К (зазоры приведены в мкм):  
 а – постоянный зазор; б – конфуззорный зазор; в – диффузорный зазор

for Gas Turbines and Power. 2009. Vol. 131. Is. 1. Paper 012505. – 6 p.

4. Dogu Y. Investigation of brush seal flow characteristics using bulk porous medium approach // ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. 2005. Vol. 127. Iss. 1. P. 136–144.

5. Demiroglu M., Gursoy M., Tichy J.A. An investigation of tip force characteristics of brush seals // Proc. ASME Turbo Expo 2007. Montreal, Canada, 2007. Paper GT2007-28042. – 12 p.

6. Temis J.M., Selivanov A.V., Dzeva I.J. Finger seal design based on fluid-solid interaction model // Proc. ASME Turbo Expo 2013. San

Antonio, Texas, USA, 2013. Paper GT2013-95701. – 9 p.

7. Temis J.M., Selivanov A.V., Dzeva I.J. Dynamic analysis of a non-contacting finger seal // Proc. 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics. Milan, 2014 // Springer. Mechanisms and Machine Science. 2015. Vol. 21. P. 2031-2042.

8. Константиnescу В.Н. Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. – 709 с.

9. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

### Модель течения газа под колодками уплотнения

Величина характерного отношения зазора под колодкой к радиусу вала в комбинированном щеточном уплотнении составляет порядка  $10^{-3}$ . Это позволяет перейти к декартовым координатам ( $z, y, s$ ) на развертке зазора и использовать приближение Рейнольдса для тонкого газового слоя [8]. Результирующее уравнение Рейнольдса для ламинарного потока идеального вязкого газа с постоянной температурой имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( ph^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( ph^3 \frac{\partial p}{\partial s} \right) = 6\mu V \frac{\partial(ph)}{\partial s}, \quad (2)$$

где  $z$  и  $s$  – осевая и окружная координаты;  $h = h(z, s)$  – функция зазора между ротором и колодкой;  $\mu$  – динамическая вязкость газа;  $V = \omega r_{\text{рот}}$  – линейная скорость поверхности ротора;  $\omega$  и  $r_{\text{рот}}$  – угловая скорость и радиус ротора.

При выводе уравнения (2) учтено, что давление газа в зазоре не зависит от координаты  $y$ .

Для решения нелинейного уравнения Рейнольдса (2) разработана программа на основе метода конечных элементов [6]. Нелинейная разрешающая система решена методом Ньютона с использованием символьных вычислений в системе *Maple*. Предварительно уравнение было представлено в безразмерном виде для выравнивания порядка коэффициентов и получения устойчивой сходимости численного алгоритма.

На границах расчетной области заданы значения статического давления: на входе и выходе постоянные величины  $p_{\text{вх}}$  и  $p_{\text{вых}}$ , на боковых границах  $p_{\text{бок}}$  в виде линейной функции падения давления. Такие граничные условия

являются согласованными. Для верификации модели Рейнольдса и уточнения граничных условий использованы результаты трехмерного моделирования течения газа, проведенного с применением универсального вычислительного комплекса. Общий вид сеточной модели и граничные условия показаны на рис. 9.

Результаты расчетов по трехмерной модели подтвердили, что распределение давления газа можно считать постоянным по толщине зазора. На рис. 10, *а* показано распределение давления на внутренней поверхности соседних колодок и в прорези между ними, полученное с использованием трехмерной модели течения. Осевые и окружные профили этого распределения в различных сечениях показаны на рис. 10, *б*. Для наглядности область зазора между колодками увеличена в 20 раз:  $c^* = 20c$ . Результаты приведены для радиального зазора 0,1 мм.

Анализ результатов (см. рис. 10) свидетельствует о том, что условие линейного падения давления на боковых границах развертки зазора ( $s = 0, s = L$ ), использованное в двумерной модели Рейнольдса, не совсем корректно. Однако сравнение значений подъемной силы, вычисленных по модели Рейнольдса и по трехмерной модели, показало различие результатов порядка 4 % (табл. 1). Это позволяет считать используемую постановку двумерной задачи хорошим начальным приближением. Еще более близкие результаты даст использование на боковых поверхностях условия  $p_{\text{бок}} = \text{const} = p_{\text{вых}}$ . Однако такой набор граничных условий является несогласованным (скачок давления в угловых точках на входе) и ведет к большим погрешно-

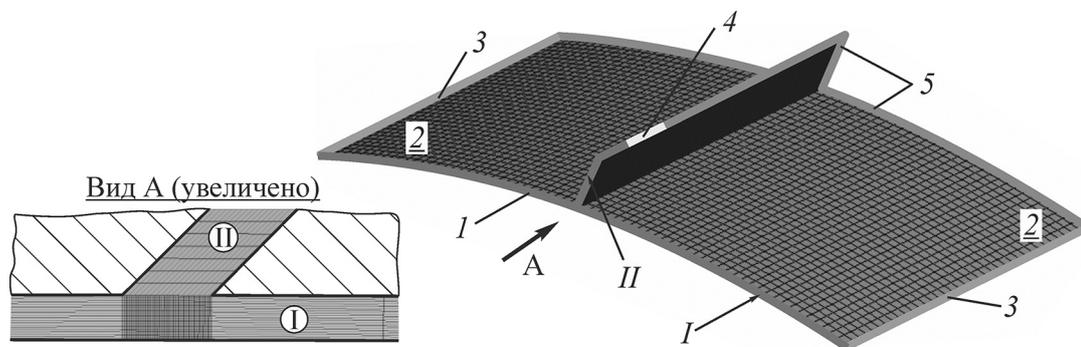


Рис. 9. Трехмерная модель и граничные условия для расчета течения газа под колодками (I) и в прорези между ними (II): 1 – область входа (полное давление); 2 – поверхность колодок (стенка); 3 – поворотная симметрия; 4 – зона щеточного уплотнения (симметрия); 5 – область выхода (давление)

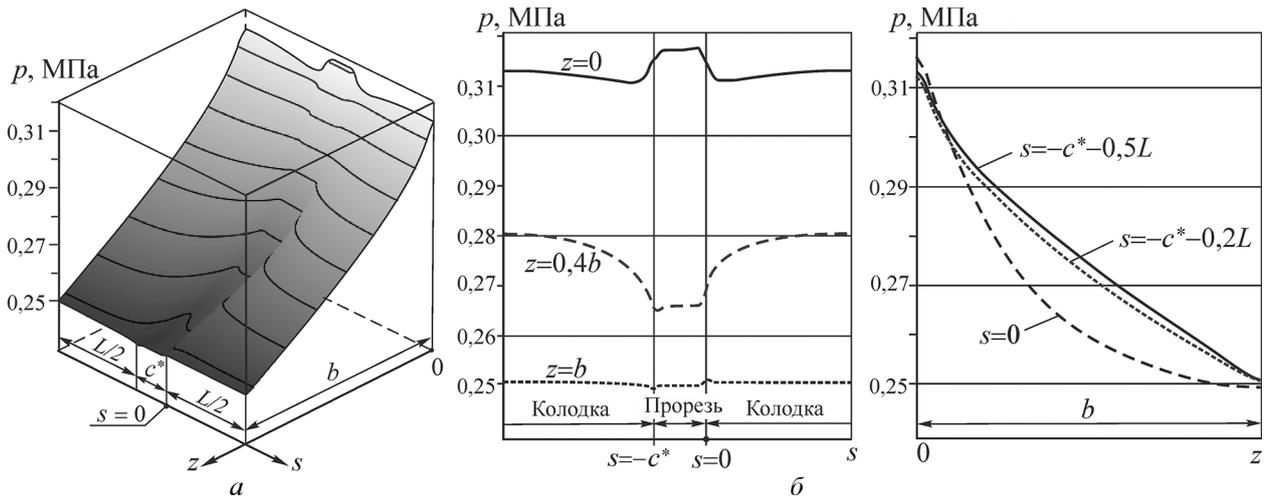


Рис. 10. Распределение давления газа под концентричными колодками и в прорези между ними (а) и осевые и окружные профили этого распределения в различных сечениях (б): полное давление газа на входе  $p_{вх}^* = 0,35$  МПа, статическое давление на выходе  $p_{вых} = 0,25$  МПа,  $V = 83$  м/с

Таблица 1

Подъемная сила  $R_k$  для различных моделей течения  
 при  $p_{вх}^* = 0,35$  МПа,  $T_{вх}^* = 300$  К,  $V = 83$  м/с ( $\omega = 1000$  рад/с)

Модель течения	$R_k^1$ , Н	$\delta^1$	$R_k^2$ , Н	$\delta^2$
3D модель (см. рис. 9)	65,06	—	51,14	—
2D модель Рейнольдса (2), условие линейного падения давления на боковой границе	66,33	1,9%	53,36	4,2%
2D модель Рейнольдса (2), на боковой границе задано низкое давление $p_{бок} = p_{вых}$	64,85	-0,3%	50,42	-1,3%
1D модель Рейнольдса, осесимметричная постановка	66,40	2,1%	53,79	5,0%

Примечание:  $\delta$  – относительная погрешность вычисления подъемной силы;  
<sup>1</sup> при  $p_{вх} = 0,318$  МПа,  $p_{вых} = 0,25$  МПа; <sup>2</sup> при  $p_{вх} = 0,297$  МПа,  $p_{вых} = 0,15$  МПа

стям при вычислении скорости и расхода газа. Применение одномерной (осесимметричной) модели Рейнольдса для концентричной площадки даст близкий уровень погрешности, но использовать эту модель для наклонных колодок при малых зазорах недопустимо.

Применение модели Рейнольдса на порядки сократило время на подготовку и проведение расчетов по сравнению с трехмерным моделированием. Это позволило реализовать эффективный алгоритм поиска равновесного положения колодок уплотнения.

### Модель напряженно-деформированного состояния упругого подвеса и колодки

Для определения коэффициентов матрицы жесткости эквивалентной модели (1) использована трехмерная конечно-элементная модель упругого подвеса, жестко закрепленного по внешнему диаметру. Параметры разбиения задавались так, чтобы по возможности обеспечить близкую к кубической форму элементов, причем для пластин подвеса использована более мелкая сетка (рис. 11, а). Тип конечного элемента – объемный восьмиузловой элемент с линейными функциями формы.

Трехмерная конечно-элементная модель включает в себя не только подвес, но и колодку, что позволило проверить адекватность исходного допущения о представлении сегмента уплотнения в виде гибкого подвеса и абсолютно жесткой колодки, сопряженных в сечении с центром  $E$ . Для этого была проведена серия предварительных расчетов с модельным (линейным) распределением давления в зазоре и без учета «подкрепляющего» действия щеточного уплотнения. Распределение интенсивности деформаций в подвесе и колодке (см. рис. 11, б) показывает, что деформации колодки пренебрежимо малы. Это подтверждает корректность сделанного допущения. Радиальные перемещения колодки и подвеса, преобладающие при данном нагружении, показаны на рис. 11, в.

Матрица жесткости упругого подвеса  $\mathbf{K}_{\text{подв}}^*$  (без учета щеточного уплотнения) вычислена путем обращения матрицы податливостей  $\mathbf{G}_{\text{подв}}^*$ :

$$\mathbf{K}_{\text{подв}}^* = [k_{ij}^*] = (\mathbf{G}_{\text{подв}}^*)^{-1} = [g_{ij}^*]^{-1}, \quad (3)$$

где  $k_{ij}^*$  и  $g_{ij}^*$  – коэффициенты жесткости и податливости упругого подвеса, соответствующие обобщенным координатам  $i, j \in \{\delta_\tau, \delta_\nu, \delta_\beta, \theta_\tau, \theta_\nu, \theta_\beta\}$ .

Коэффициенты податливости подвеса  $g_{ij}^*$  определены численно при приложении единичных нагрузок в сечении сопряжения по направлениям осей локальной системы координат  $(\tau, \nu, \beta)$  (см. рис. 3). Величины компонент матрицы податливости  $\mathbf{G}_{\text{подв}}^*$ , рассчитанные по трехмерной модели, приведены в табл. 2. По данным таблицы, податливость упругого подвеса по радиальному направлению  $\nu$  в несколько раз больше податливостей в остальных направлениях. В дальнейшем целесообразно получить полуаналитические зависимости податливостей  $g_{ij}^*$  от геометрических параметров уплотнения на основе моделей механики стержней и пластин, как это было сделано для пальчикового уплотнения [6].

Обращение матрицы податливости позволило определить матрицу жесткости подвеса и замкнуть построение эквивалентной модели (1). Альтернативным вариантом нахождения матрицы жесткости является применение техники создания суперэлемента на основе метода статической конденсации степеней свободы трехмерной конечно-элементной модели подвеса [9].

Результаты тестового расчета радиальных перемещений угловых точек колодки ( $A, B, C, D$ ) при модельном нагружении при-

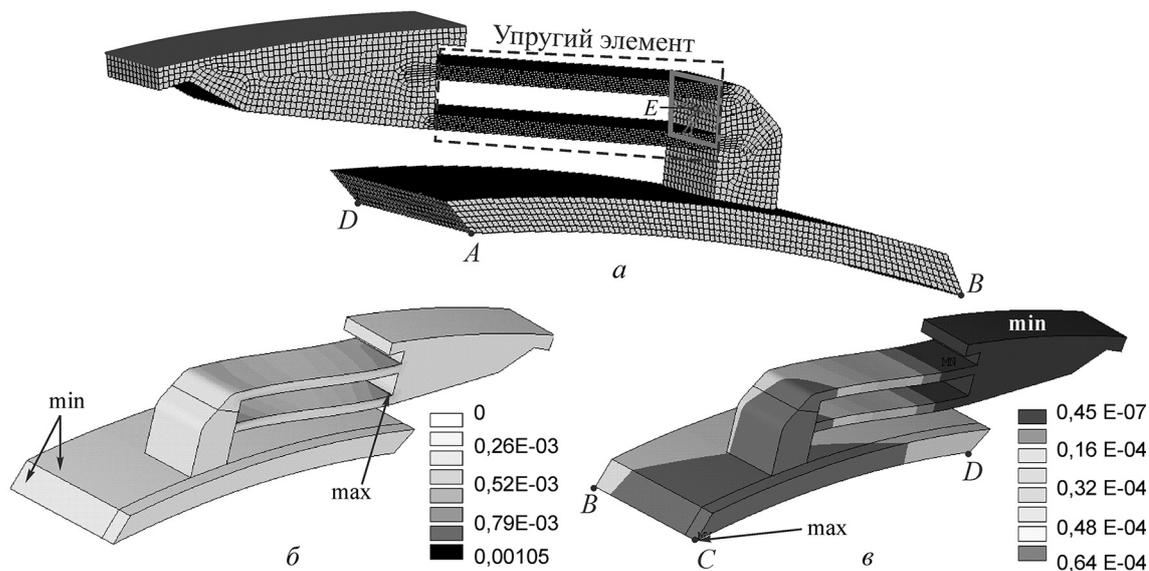


Рис. 11. Расчет напряженно-деформированного состояния подвеса и колодки при модельном нагружении: а – конечно-элементная модель; б – распределение интенсивности деформаций; в – радиальные перемещения (м)

Таблица 2

Матрица податливости упругого подвеса  $G_{\text{подв}}^* = [g_{ij}^*]$

$i, j$	1 ( $\delta_\tau$ )	2 ( $\delta_\nu$ )	3 ( $\delta_\beta$ )	4 ( $\theta_\tau$ )	5 ( $\theta_\nu$ )	6 ( $\theta_\beta$ )
	Силовые податливости, м/кН			Смешанные податливости, рад/кН		
1 ( $\delta_\tau$ )	0,001	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$	0,102	-0,014
2 ( $\delta_\nu$ )	$\approx 0$	0,009	-0,002	-0,104	$\approx 0$	$\approx 0$
3 ( $\delta_\beta$ )	$\approx 0$	-0,002	0,001	0,026	$\approx 0$	$\approx 0$
	Смешанные податливости, 1/кН			Моментные податливости, рад/(кН·м)		
4 ( $\theta_\tau$ )	$\approx 0$	-0,104	0,026	15,43	$\approx 0$	$\approx 0$
5 ( $\theta_\nu$ )	0,102	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$	21,77	30,11
6 ( $\theta_\beta$ )	-0,014	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$	30,11	127,17

Примечание:  $\approx 0$  – пренебрежимо малые податливости

Таблица 3

Радиальные перемещения углов колодки

Модели расчета	Радиальные перемещения углов колодки в точках, мкм			
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
Трехмерная КЭ модель (рис. 11)	42,5	54,7	64,0	52,7
Эквивалентная модель (1)	43,4	58,5	66,4	52,3
Относительная погрешность	2,1%	7,1%	3,8%	0,8%

ведены в табл. 3. Там же указаны величины относительной погрешности эквивалентной модели в сравнении с трехмерной моделью. Погрешность для углов кромки *BC*, имеющей максимальные перемещения, составила 4-7 %, а в абсолютном выражении разность результатов – менее 4 мкм.

Для получения итоговой матрицы жесткости  $K_{\text{подв}}^*$  к элементам матрицы жесткости подвеса  $K_{\text{подв}}$  добавлены слагаемые, отвечающие за жесткостные характеристики щеточного уплотнения. В первом приближении для этого использована модель упругого основания с постоянной жесткостью щетины  $k_{\text{щст}} = 5$  кН/м [5].

Материал поступил в редакцию 03.09.2015

<p><b>ТЕМИС</b> <b>Юрий Моисеевич</b> E-mail: <a href="mailto:tejour@ciam.ru">tejour@ciam.ru</a> Тел.: (495) 362-90-86</p>	<p>Доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, член-корреспондент РАЕН. Начальник отдела «Математическое моделирование и САПР ГТД» Центрального института авиационного моторостроения им. П.И. Баранова. Сфера научных интересов – динамика, прочность и ресурс турбомашин, механика деформируемого твердого тела, теория пластичности и ползучести, оптимальное проектирование, САПР, междисциплинарное математическое моделирование. Автор двух монографий, более 200 научных статей, девяти изобретений.</p>
<p><b>СЕЛИВАНОВ</b> <b>Алексей Валерьевич</b> E-mail: <a href="mailto:alexvsel@yandex.ru">alexvsel@yandex.ru</a> Тел.: (495) 361-64-82</p>	<p>Начальник сектора отдела «Математическое моделирование и САПР ГТД» Центрального института авиационного моторостроения им. П.И. Баранова. Ассистент кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов – междисциплинарное математическое моделирование, аэроупругие колебания, газовая динамика, динамика твердых и деформируемых тел, САПР. Соавтор одной монографии и более 40 научных статей.</p>
<p><b>ДЗЕВА</b> <b>Иван Юрьевич</b> E-mail: <a href="mailto:dzevavanya@yandex.ru">dzevavanya@yandex.ru</a> Тел.: (495) 361-64-82</p>	<p>Аспирант кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, младший научный сотрудник отдела «Математическое моделирование и САПР ГТД» Центрального института авиационного моторостроения им. П.И. Баранова. Сфера научных интересов – междисциплинарное математическое моделирование, механика деформируемого твердого тела, газовая смазка, САПР. Соавтор более 10 научных статей.</p>