

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ФАКТОРЫ ПРИ СОВМЕСТНОМ СИЛОВОМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ КОЛЕБАНИЙ В ЦИКЛОВЫХ МАШИНАХ

И.И. Вульфсон

*Применительно к задачам динамики машин с механизмами циклового действия (рычажные, кулачковые, шаговые и др.) исследуются влияние нелинейных упругодиссипативных характеристик и нелинейной функции положения исполнительного органа на условия динамической устойчивости, совместные вынужденные и параметрические колебания и точность воспроизведения заданного программного движения. В работе установлены способы подавления параметрических резонансов с учетом медленных и быстрых движений, а также амплитудной модуляции при высокочастотном силовом возбуждении. Анализируется специфический резонансный режим на частоте биений. Исследуемые нелинейные эффекты иллюстрируются результатами компьютерного моделирования.*

**Ключевые слова:** вынужденные и параметрические колебания, цикловые механизмы, динамическая устойчивость, диссипативные силы, биения.

## NONLINEAR FACTORS AT THE JOINT FORCE AND PARAMETRIC EXCITATION OF VIBRATIONS IN CYCLIC MACHINES

I.I. Vulfson

*In regard to dynamics issues of machines with cyclic action mechanisms (linkage, cam, stepper, etc.), in the article there are examined influence of nonlinear elastic-dissipative characteristics and nonlinear position function of the actuator on the dynamic stability, the joint forced and parametric vibrations as well as the precise reproduction of the given programmed motion. The methods for parametric resonance suppression are suggested, taking into account slow and fast movements, as well as the amplitude modulation with the high-frequency excitation. The specific resonant mode at the beat frequency is analysed. The studied nonlinear effects are illustrated by the results of computer simulation.*

**Keywords:** forced and parametric vibrations, cyclic mechanisms, dynamic stability, dissipative forces, beats.

### Введение

Исполнительные органы многих технологических машин совершают периодические программные движения, которые осуществляются так называемыми цикловыми механизмами – рычажными, кулачковыми, шаговыми и др. Кинематические характеристики цикловых механизмов являются не только источником возмущений, но и формируют нелинейные и нестационарные динамические связи, которые могут привести к увеличению виброактивности системы и даже к ее динамической неустойчивости [1–4].

Влияние нестационарных связей носит двоякий характер. Наиболее известным примером проявления нестационарных связей является параметрический резонанс, при котором на определенных частотных диапазонах система приобретает способность накапливать энергию. В машинах с цикловыми механизмами обычно имеет место медленное изменение параметров, при котором частота вращения входного звена достаточно удалена от наиболее опасного главного параметрического резонанса, а резонансы высших порядков оказываются подавленными даже при малых диссипатив-

ных силах. На практике это нередко приводит к ложному выводу о том, что влиянием нестационарных связей можно пренебречь. Однако в современных технологических машинах и автоматических линиях нередки случаи, когда приведенные инерционные и упругие характеристики содержат не только низкочастотные, но и высокочастотные составляющие. Такая ситуация возникает, когда функция положения исполнительных органов имеет многокомпонентную структуру, а также, если во время кинематического цикла происходит подключение или отключение отдельных элементов кинематической цепи.

Другой возможной причиной игнорирования роли нестационарных связей нередко являются традиционные представления об источниках возбуждения свободных колебаний, согласно которым они возникают лишь из-за начальных условий и относительно быстро затухают за счет диссипативных сил. При этом не принимаются во внимание так называемые *сопровождающие колебания*, когда возбуждаются колебания с собственной частотой, но, в отличие от свободных колебаний, их амплитуда зависит не от начальных условий, а от нарушений непрерывности частного решения и ее производной [1–4]. В цикловых механизмах такие нарушения чаще всего возникают при реализации заданного закона программного движения выходного звена на протяжении всего кинематического цикла. Нестационарные связи могут быть источником существенного повышения виброактивности цикловых механизмов. В частности, при этом эффективный коэффициент диссипации существенно снижается и может внутри кинематического цикла стать отрицательным, что приводит к локальному росту амплитуд колебаний. Условия подавления этого эффекта также могут быть квалифицированы как условия квазистационарности [5, 6].

Помимо нелинейных диссипативных сил проявление других нелинейностей в цикловых машинах также носит специфический характер. Это, в первую очередь, связано с комплексным характером медленных и быстрых движений, а также с проблемой динамической устойчивости при совместном параметрическом и силовом возбуждении. В общетеоретическом плане исследование подобных задач базируется на фундаментальных работах Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и ряда других извест-

ных ученых – математиков и механиков [7–9]. Однако отметим, что процедура практического решения подобных задач на инженерном уровне далеко не элементарна и нуждается в дальнейшем совершенствовании, особенно если иметь в виду реальные колебательные системы современных машин и механизмов. В прикладном плане здесь следует выделить монографии В.В. Болотина и Г. Шмидта [10, 11].

В связи с исследуемой проблемой несомненный интерес представляет выявленный М.З. Коловским интересный динамический эффект, который состоит в том, что при определенных условиях возможно низкочастотное резонансное возбуждение на частоте биений, возникающих при высокочастотной амплитудной модуляции [12]. Применительно к задачам динамики машин этот эффект частично рассмотрен в работах [3, 4, 13].

Целью данной работы является исследование влияния нелинейных упругодиссипативных характеристик и нелинейной функции положения исполнительного органа на условия динамической устойчивости и точность воспроизведения заданного программного движения при совместном силовом и параметрическом возбуждении. В работе использован метод условного осциллятора, что позволяет избежать трудностей, возникающих в ряде случаев при применении традиционных методов решения [1–5, 14].

### Постановка задачи

Связь между координатами на входе и выходе циклового механизма описывается нелинейной функцией положения. Для идеального механизма, в котором отсутствуют зазоры и все звенья принимаются абсолютно жесткими,  $\varphi = \varphi_* = \omega t$ , где  $t$  – время;  $\omega = \text{const}$  – угловая скорость входного звена.

Пусть  $\varphi = \varphi_* + q$ , где  $q$  – динамическая ошибка, возникающая при колебаниях. Принимая во внимание, что функция положения идеального механизма непрерывна и дифференцируема, произведем линеаризацию этой функции в окрестности программного движения:

$$\Pi(\varphi_* + q) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_0)q.$$

Здесь  $\Pi' = d\Pi/d\varphi$  – первая геометрическая передаточная функция механизма (аналог скорости). Таким образом, практически без ущерба для точности нелинейная связь трансформирована в нестационарную. Для наглядности выявленные динамические эффекты ил-

люстрируются на примере эталонной модели привода циклового механизма кольцевой структуры, колебательная система которой имеет одну степень свободы (рис. 1). Заметим, что использованные ниже методы анализа с помощью аппарата квазинормальных координат могут быть применены и для систем большой размерности [3–7].

Введем следующие условные обозначения:  $J_j$  – момент инерции;  $c_j$  – коэффициенты жесткости;  $\psi_j$  – коэффициенты рассеяния;  $\Pi$  – оператор, соответствующий нелинейному преобразованию согласно заданному программному движению исполнительного органа (см. выше). В качестве обобщенной координаты  $q$  примем деформацию входного звена, которая в данном случае также является динамической ошибкой при воспроизведении заданного программного движения. После линеаризации функции положения  $\Pi(\varphi)$  в окрестности программного движения эта модель описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$J_1(1 + \mu\Pi_*'^2)\ddot{q} + R(q, \dot{q}) + 2J_2\Pi_*'\Pi_*''\omega\dot{q} + c_1(1 + \zeta\Pi_*'^2)q = M(t)\Pi_*' - J_2\Pi_*'\Pi_*''\omega^2; \quad (1)$$

$$\dot{q} = dq/dt; \ddot{q} = d^2q/dt^2; \mu = J_2/J_1; \zeta = c_2/c_1.$$

Здесь  $R(q, \dot{q})$  – нелинейная диссипативная сила, соответствующая коэффициенту рассеяния  $\psi$  (подробнее см. ниже);  $\Pi_*' = d\Pi'/d\varphi$ ,  $\Pi_*'' = d^2\Pi/d\varphi^2$  – первая и вторая геометрические передаточные функции (звездочка отвечает аргументу  $\varphi = \varphi_*$ );  $M(t)$  – внешний момент, приложенный к исполнительному органу.

В более общем случае упругая составляющая в левой части уравнения (1) может быть нелинейной. Тогда функция, описывающая линейную восстанавливающую силу  $c_1q$ , должна

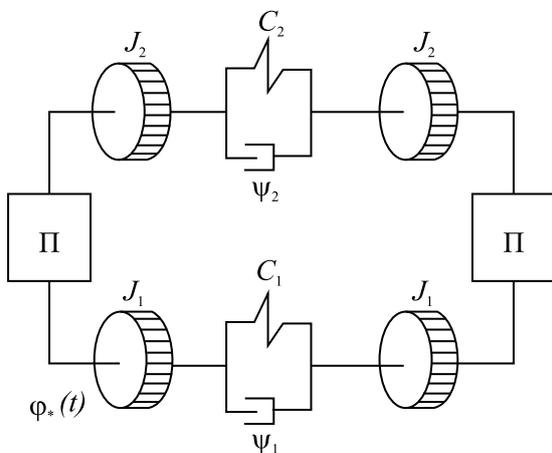


Рис. 1. Эталонная динамическая модель привода циклового механизма кольцевой структуры

быть заменена соответствующей нелинейной функцией  $K(q)$ . В данной задаче, например, такая ситуация возникает при учете зазоров, натяга, при применении специальных муфт и т.п. (см. ниже).

Уравнение (1) свидетельствует о следующих возможных факторах, формирующих основные источники повышения виброактивности рассматриваемого класса систем:

- переменность инерционных и упругих характеристик, которая в зонах параметрических резонансов может привести к нарушению условий динамической устойчивости;
- наличие медленных и быстрых составляющих в передаточных функциях и приведенных вынуждающих силах, что при учете нелинейности диссипативных сил влияет на пороговые значения глубины пульсации параметров системы;
- взаимовлияние вынужденных и параметрических колебаний;
- возбуждение низкочастотных резонансов цикловых механизмов на частоте бисний.

Учет каждого из перечисленных факторов преследует цель разработки инженерных рекомендаций, направленных на подавление критических колебательных режимов, повышающих динамические нагрузки и нарушающих точность воспроизведения заданного программного движения рабочих органов технологических машин.

#### **Учет нелинейных позиционных диссипативных сил при вынужденных и параметрических колебаниях**

Роль диссипативных факторов при формировании колебательных режимов чрезвычайно велика. В частности, от уровня диссипации зависят амплитуда резонансных колебаний, интенсивность затухания свободных колебаний, условия динамической устойчивости при параметрическом возбуждении, возникновение субгармонических режимов, автоколебаний и др. Между тем, учет именно этих сил нередко оказывается наиболее уязвимым местом в динамических исследованиях и инженерных расчетах колебательных систем машин. Последнее, в первую очередь, связано с тем, что большое число диссипативных факторов, а также сложность и многообразие энергетических потерь при колебаниях существенно затрудняют корректное математическое описание диссипативных сил. При этом мы обычно

располагаем ограниченной исходной информацией, заимствованной из экспериментальных материалов в форме некоторых интегральных диссипативных характеристик, таких как коэффициент рассеяния  $\psi$  или логарифмический декремент  $\vartheta$ , которые получены при гармонических колебаниях некоторых эталонных моделей. Однако, «настраивая» реальную механическую систему на гармонический режим для определения этих параметров, мы, по существу, экспериментальным методом осуществляем гармоническую линеаризацию диссипативных сил. Поэтому полученная таким образом информация о диссипативных свойствах системы является далеко не полной и отражает их лишь в той мере, в какой гармонически линеаризованная диссипативная сила соответствует действительному сопротивлению. Естественно, при многочастотных колебаниях это соответствие нарушается, причем нередко – существенным образом (см. ниже).

Для систем с одной степенью свободы возникающая при колебаниях сила сопротивления  $R$ , независимо от ее природы, может быть описана следующим образом:

$$R = -|R(q, \dot{q})| \text{sign} \dot{q}. \quad (2)$$

В одних случаях модуль силы не зависит от обобщенной скорости (позиционные силы трения), в других — модуль силы не зависит от обобщенной координаты («вязкое» трение); в частном случае модуль силы может сохранять постоянное значение (кулоново трение).

Аналитическое исследование проблемы учета нелинейных диссипативных сил при многочастотном возмущении основано на предложенной И.И. Блехманом идее разделения движений на быстрые и медленные [15]. При реализации этой идеи возможны несколько подходов. Один подход, разработанный И.И. Блехманом применительно к задачам вибрационной реологии, позволяет определять так называемые вибрационные силы, отражающие влияние высокочастотных составляющих возбуждения на медленные процессы.

При другом подходе движение системы рассматривается как совокупность двух движений: существенно зависящих от диссипации (например, резонансных) и практически не зависящих от диссипации (например, нерезонансных). Этот подход, базирующийся на методах гармонической или статистической линеаризации, был использован применительно к системам с сухим трением [12] и при пози-

ционных гистерезисных силах сопротивления [3, 4, 16, 17].

По характеру влияния диссипативных сил колебательные режимы можно разделить на две группы. К первой группе отнесем режимы, амплитудный уровень которых зависит от диссипации, такие как свободные колебания и вынужденные резонансные колебания; ко второй – режимы, существование которых возможно только при преодолении некоторого энергетического барьера, определяемого диссипацией. Такой эффект, в частности, наблюдается при возбуждении параметрического и субгармонического резонансов, а также в автоколебаниях при жестком возбуждении. При этом «чужие» колебания могут быть как высокочастотными (быстрое движение), так и низкочастотными (медленное движение).

Физические предпосылки анализируемого динамического эффекта связаны с возникновением так называемых частных петель гистерезиса, расположенных внутри петли, соответствующей колебаниям с основной частотой [3, 4, 16]. При условии, что эти петли замкнуты, их суммарная площадь пропорциональна работе сил сопротивления, осуществляемой за счет «чужого» движения. При этом эффективная площадь петли гистерезиса для исследуемого режима уменьшается, что проявляется в снижении приведенных диссипативных характеристик. Подчеркнем, что для появления частных петель и реализации исследуемого эффекта скорость обязательно должна менять свой знак на промежуточных участках контура основной петли. Математическое описание петли гистерезиса при неоднородных колебаниях представляет достаточно сложную и трудоемкую задачу даже при статической постановке задачи и мало приспособлено к решению практических инженерных задач динамики машин. Впрочем, нас интересует не сам контур петли гистерезиса, а энергетический эквивалент, определяемый ее эффективной площадью.

С учетом вышеизложенного, уточненная позиционная диссипативная сила (2), отнесенная к единице массы или моменту инерции, может быть представлена как

$$f_1(q, \dot{q}) = -|f_0| u(|\dot{q}| - v) \text{sign} \dot{q}, \quad (3)$$

$$f_0 = R(q) / J_1,$$

где  $u$  – единичная функция ( $u = 1$  при  $|\dot{q}| > v$  и  $u = 0$  при  $|\dot{q}| < v$ );  $v$  – скорость, связанная

с дополнительным движением («чужие» гармоники, переносное движение и т.п.).

На основании (3) эффективные значения диссипативных характеристик корректируются следующим образом [2–4, 16, 17]:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 \Phi, \quad \vartheta = \vartheta_0 \Phi; \\ \lambda &= \max \dot{q} / \max v. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\psi_0, \vartheta_0$  – параметры диссипации, определенные при моногармонических колебаниях;  $\Phi = \Phi(\lambda)$  – корректирующий диссипативный коэффициент, зависящий от отношения виброскоростей  $\lambda$  и формы петли гистерезиса.

С некоторым запасом для типовых петель гистерезиса получаем

$$\Phi = \lambda(0,4 + 0,5\lambda) / (1 + 0,5\lambda^2). \quad (5)$$

При малых значениях  $\lambda$  функция  $\Phi(\lambda)$  близка к линейной (рис. 2, а), т.е. пропорциональна амплитуде. Тогда, если при моногармоническом режиме коэффициент рассеяния  $\psi_0$  обратно пропорционален амплитуде, то  $\psi = \psi_0 \Phi = \text{const}$ . Такая ситуация, в частности, возникает при кулоновом трении, когда при высокочастотном возбуждении происходит вибрационная линеаризация этих сил [12].

При вынужденных колебаниях возрастание резонансной амплитуды, вызванное «чужими» колебаниями, на основании (4) определяется коэффициентом  $\chi$ , который является корнем уравнения

$$\chi = \Phi^{-1}(\chi \lambda_0),$$

где  $\lambda_0$  – отношение виброскоростей без учета влияния «чужих» колебаний.

На рис. 2, б приведен график функции  $\chi(\lambda_0)$ , полученный при использовании аппроксимирующей зависимости (5), определяющей функцию  $\Phi$ .

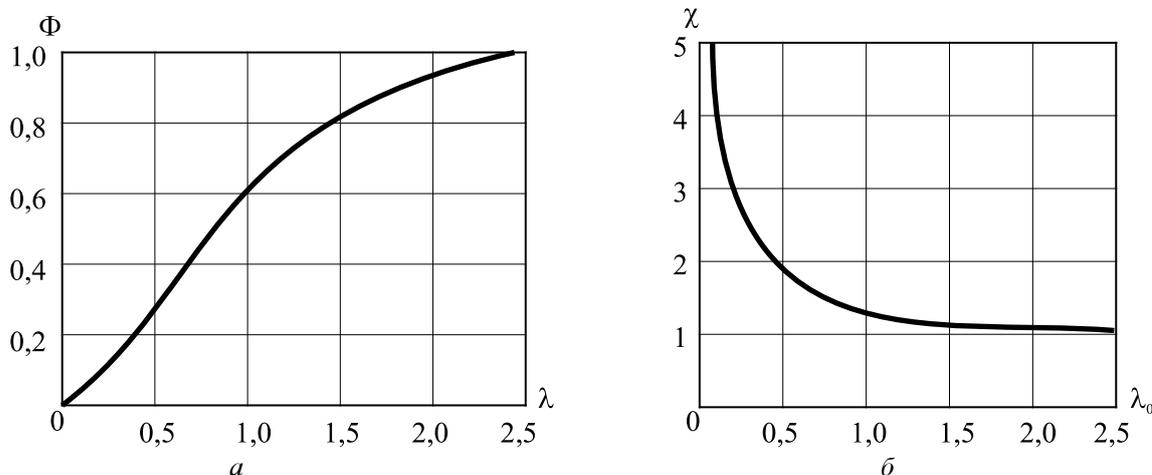


Рис. 2. Корректирующий диссипативный коэффициент (а) и коэффициент возрастания резонансной амплитуды (б) при высокочастотном возбуждении

### Подавление параметрических резонансов при полигармонической структуре функции положения

Параметрические эффекты в рассматриваемой системе выявляются на основании однородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + p^2(t)q &= 0; \\ p(t) &= k\sqrt{(1 + \zeta\Pi'^2) / (1 + \mu\Pi'^2)}; \\ n(t) &= n_0(t) + n_h(t); \quad k = \sqrt{c_1 / J_1}; \quad n_0(t) = \delta p(t); \\ \delta &= \vartheta / (2\pi); \quad n_h(t) = \omega(da / d\varphi) / (2a); \\ a(\varphi) &= J_1(1 + \mu\Pi'(\varphi)^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Функции  $n_0$  и  $n_h$  описывают диссипативную и гироскопическую составляющие, а функция  $p(t)$  – переменную «собственную» частоту. Параметр  $\delta$  при полигармоническом возбуждении корректируется согласно (4).

Пусть  $\Pi' = \Pi'_\omega + \Pi'_\nu$ ,

где слагаемые соответствуют медленным и быстрым движениям.

Для определенности примем

$$\Pi'(\varphi) = h[\sin \varphi + \varepsilon \sin(\nu\varphi + \gamma)].$$

Здесь первое слагаемое отвечает «медленной», а второе – «быстрой» гармонике с частотой  $\nu$  и глубиной пульсации  $\varepsilon$ . На рис. 3 для ряда типовых случаев приведены графики  $p(\varphi_*)$  при  $h = 1$ ;  $\varepsilon = 0, 2$ ;  $\nu = 7$ . Огибающим для экстремальных значений соответствуют штриховые линии. При  $\varepsilon = 0$  имеем  $p(\varphi_*) = p_\omega(\varphi_*)$ .

В этом случае сохраняется только медленно меняющаяся составляющая «собственной» частоты, которой на графике отвечает штрихпунктирная линия. Здесь и ниже использованы нормированные безразмерные частоты, относенные к  $\omega$ , что соответствует переходу

к безразмерному времени  $\varphi_* = \omega t$ . Практически это легко достигается заменой коэффициентов жесткости  $c_i$  на  $c_i / \omega^2$ .

На основании (6), используя метод условного осциллятора [1–4, 14], определим изменение амплитуды колебаний:

$$A(\varphi) = A_0 \sqrt{a(0) / a(\varphi)} \times \exp \left[ -\delta \int_0^\varphi p_\omega(\varphi) d\varphi - 0,5[z(\varphi) - z(0)] \right], \quad (7)$$

где  $A_0 = A(0)$ , а функция  $z(\varphi)$  является решением следующего дифференциального уравнения, которое описывает «колебания» в некотором условном осцилляторе с медленно изменяющейся «собственной» частотой  $p_\omega(\varphi)$ :

$$z'' - 0,5z'^2 + 2p_\omega^2(\varphi)e^{2z} = 2p^2(\varphi). \quad (8)$$

В зависимостях (7), (8) и ниже звездочка при  $\varphi$  опускается. При медленном изменении параметров, согласно (8), формула (7) приводится к виду

$$A(\varphi) = A_0 \sqrt{a(0)p_\omega(0) / [a(\varphi)p_\omega(\varphi)]} \times \exp \left[ -\delta_0 \int_0^\varphi p_\omega(\varphi) d\varphi \right]. \quad (9)$$

На основании (8) и (9) можно показать, что при реальной пульсации высокочастотных гармоник  $z < 1$ . При этом с достаточной для инженерных приложений точностью можно осуществить линеаризацию уравнения (8) [1–4]:

$$z'' + 4p_\omega^2(\varphi)z = 2[p^2(\varphi) - p_\omega^2(\varphi)]. \quad (10)$$

Теперь в левой части уравнения в качестве параметра сохранилась медленно меняющаяся функция, что позволяет воспользоваться непосредственно ВКБ-методом [9]. Резонанс линеаризованного условного осциллятора соответствует главному параметрическому резонансу, который возникает в окрестности «плавающей» частоты  $2p_\omega$ . Частное решение уравнения (10) имеет вид модифицированной формулы Дюамеля

$$z = \frac{1}{\sqrt{p_\omega(\varphi)}} \int_0^\varphi \frac{[p(u)^2 - p_\omega(u)^2]}{\sqrt{p_\omega(u)}} \sin \left[ 2 \int_u^\varphi p_\omega(\tau) d\tau \right] du. \quad (11)$$

Заметим, что аналитический подход в данном случае необходим в большей степени для оценок качественного характера и оптимизации параметров при динамическом синтезе, так как при инженерных расчетах можно также воспользоваться численным решением уравнения (8).

На основании (7) мы с некоторым запасом получаем лаконичное условие динамической устойчивости в области главного параметри-

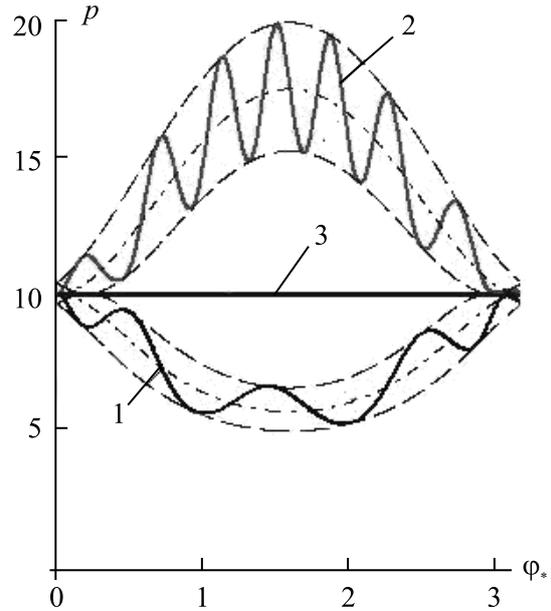


Рис. 3. Графики переменных «собственных» частот  $p(\varphi_*)$  при  $h = 1, \varepsilon = 0,2, \nu = 7$ :

1 –  $\mu = 2, \zeta = 0$ ; 2 –  $\mu = 0, \zeta = 2$ ; 3 –  $\mu = \zeta = 2$

ческого резонанса при совместном учете быстрых и медленных изменений параметров:

$$\vartheta > \vartheta^* = -0,5\Delta z / p_*, \quad (12)$$

$$\Delta z = z(2\pi) - z(0), \quad p_* = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} p_\omega(\varphi) d\varphi.$$

Как следует из (7), условие (12) исключает рост амплитудного уровня при  $t \rightarrow \infty$ , но такая возможность сохраняется внутри кинематического цикла из-за переменности периодически изменяющегося инерционного параметра  $a = a(\varphi)$ . Поскольку  $a(\varphi) = a(2\pi)$ , работа этой составляющей за период  $2\pi / \omega$  равна нулю, что свойственно гироскопическим силам. Однако в пределах цикла возможны зоны, в которых  $dA / d\varphi > 0$ , что нередко приводит к существенным динамическим ошибкам при реализации программного движения.

Условие  $dA / d\varphi < 0$  можно представить как

$$\vartheta > \vartheta^* = \pi p_\omega^{-1} \left| \left( \frac{a'}{a} + z' \right) \right| = \pi p_\omega^{-1} \left| \frac{a'}{a} + \frac{p'}{p} - \frac{p'_\omega}{p_\omega} \right|. \quad (13)$$

Отметим, что неравенство (13) совпадает с результатами, полученными на основании прямого метода Ляпунова, устанавливающего достаточное условие динамической устойчивости [1]. Весьма эффективным способом устранения возможности возбуждения параметрических резонансов является выполнение условий квазистационарности [6]. При реализации этих условий, несмотря на переменность параме-

тров системы, «собственные» частоты в первом приближении сохраняют постоянное значение, и отсутствует рост энергии на интервале кинематического цикла. Для рассматриваемой модели условия квазистационарности удовлетворяются при  $\mu = \zeta$  [6] (см. уравнение (6) и рис. 3, кривая 3). Тогда, согласно (11)  $z \equiv 0$ , и выполняется условие (12), исключая возбуждение главного параметрического резонанса.

На рисунке 4 показаны графики  $z(\varphi)$ , полученные компьютерным моделированием рассматриваемой модели без учета внешних сил, т.е. на основании однородного уравнения (6) для двух режимов:  $\mu = 2, \zeta = 0$  (кривые 1) и при  $\mu = \zeta = 2$  (кривые 2).

Помимо роста амплитудного уровня от цикла к циклу, на графике четко видна амплитудная модуляция внутри каждого цикла, возникающая из-за гироскопических составляющих (см. выше). На рисунке 5 приведены графики  $A(\varphi)$  при  $\mu = 2, \zeta = 0$  и коэффициентах диссипации  $\delta = 0,02$  (кривая 1) и  $\delta = 0,04$  (кривая 2). В первом случае параметрический резонанс подавляется, но при  $\delta < \delta^* = \vartheta^* / (2\pi) \approx 0,05$  условия (13) на отдельных участках нарушены, что приводит к прерывистому затуханию колебаний. Во втором случае эти условия практически соблюдены.

#### Оценка резонансных амплитуд при совместном учете силового и параметрического возбуждения

Можно показать, что при совпадении частоты гармоники вынуждающей силы с частотой главного параметрического резонанса, амплитуда обратно пропорциональна функции

$$\vartheta_r = |\vartheta - \vartheta^* \cos 2\Delta\gamma|, \quad (14)$$

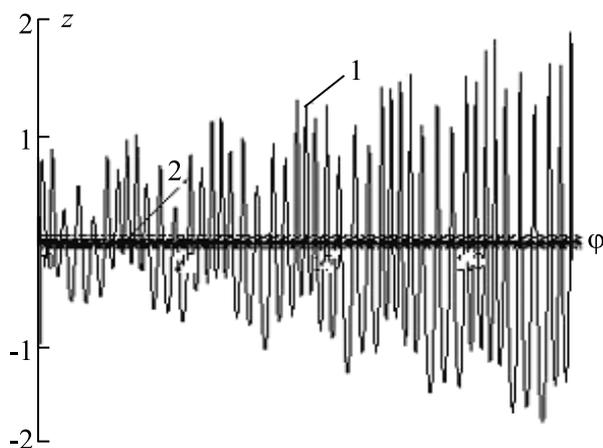


Рис. 4. Графики  $z(\varphi)$ :  
1 –  $\mu = 2, \zeta = 0$ ; 2 –  $\mu = \zeta = 2$

где  $\Delta\gamma$  – фазовый сдвиг между силовым и параметрическим возбуждением [3, 4].

Таким образом, резонансная амплитуда  $A$  отвечает некоторой условной системе с измененным уровнем диссипации. В зависимости от фазового сдвига  $\Delta\gamma$  амплитуда  $A$  может быть как больше, так и меньше значения, полученного при постоянных значениях параметров. Этот эффект проиллюстрирован на рис. 6 результатами компьютерного моделирования.

Исследуются три резонансных режима при заданном значении логарифмического декремента  $\vartheta = 0,39$ . Режим 1 (кривые 1) отвечает вынужденным колебаниям, при котором коэффициент динамичности  $\kappa = \pi / \vartheta = 8,05$ . При режимах 2 и 3 наряду с силовым возбуждением имеет место параметрическое возбуждение с глубиной пульсации  $\varepsilon = 0,2$  и разными фазовыми сдвигами между силовым и параметрическим возбуждениями (кривые 2, 3). Согласно (14),  $\vartheta^* = 0,31$ , тогда при режиме 2 имеем  $\vartheta_r = \vartheta_{\max} = 0,7$  (кривая 2), а при режиме 3 –  $\vartheta_r = \vartheta_{\min} = 0,08 < \vartheta^*$ . Разумеется, при  $\vartheta_r < \vartheta^*$  вопрос о максимальной амплитуде теряет смысл, так как в этом случае система динамически неустойчива. Такая ситуация возникает при  $\vartheta < 2\vartheta^*$ . Тогда  $\Delta\gamma$  влияет на интенсивность роста резонансной амплитуды (рис. 7). На графике  $q(\varphi)$  четко видно, что при относительно большом эффективном значении  $\vartheta_{\max}$  (кривая 1) на начальном этапе реализуется режим силового резонанса, который далее перекрывается экспоненциальным нарастанием амплитуд, свойственным параметрическому резонансу. При  $\vartheta_{\min}$  (кривая 2) этап силового возбуждения практически незаметен.

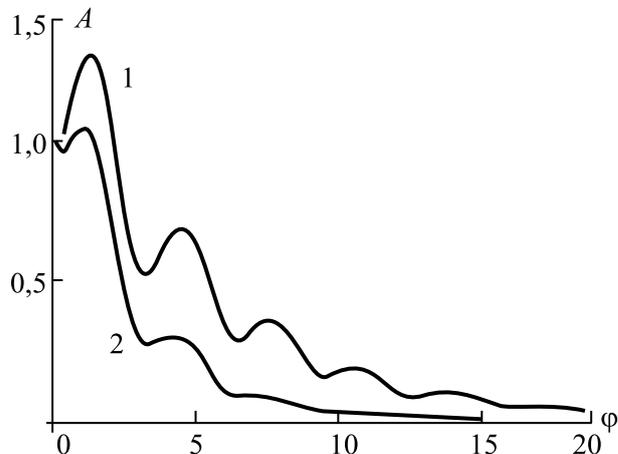


Рис. 5. Графики  $A(\varphi)$  при  $\mu = \zeta = 2$ :  
1 –  $\delta = 0,02$ ; 2 –  $\delta = 0,04$

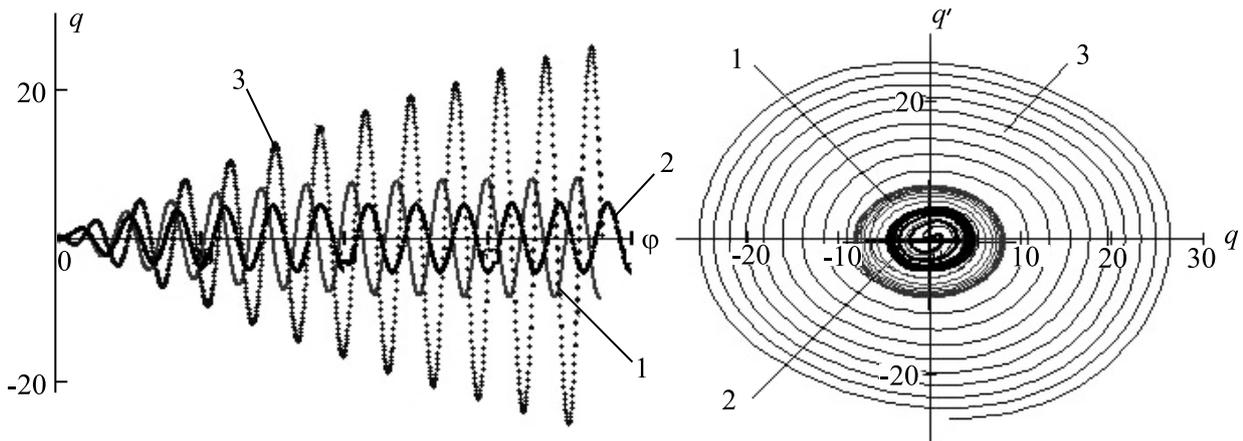


Рис. 6. Влияние фазового сдвига  $\Delta\gamma$  на резонансный режим:  
1 –  $\varepsilon = 0$ ; 2 –  $\varepsilon = 0,2, \Delta\gamma = \pi/2$ ; 3 –  $\varepsilon = 0,2, \Delta\gamma = 0$

Далее проведем коррекцию полученных результатов при совместных силовых и параметрических возмущениях и с учетом высокочастотных воздействий на резонансные колебания. На основании (4), (5), (14) можно показать, что при наиболее неблагоприятном соотношении фаз максимальная резонансная амплитуда в этом случае определяется как  $A^* = \chi_1 A$ , где  $A$  – амплитуда при отсутствии высокочастотного возбуждения;  $\chi_1$  – скорректированный коэффициент возрастания резонансной амплитуды, который является корнем уравнения

$$\chi_1 = \vartheta_0 / [\vartheta_0 \Phi(\lambda_0) - \vartheta^*]. \quad (15)$$

В правую часть уравнения (15) в скрытом виде входит  $\chi_1$ , поскольку отношение виброскоростей  $\lambda_0$  также зависит от искомой резонансной амплитуды. Используя (5), приведем решение уравнения (15) к виду

$$\chi_1 = 0,5 \left[ 1 + sL + \sqrt{(1 + sL)^2 + 4s(1 - L)} \right] / (1 - L),$$

$$L = 2\pi\varepsilon / \vartheta_0, \quad s = \Phi^{-1}(\lambda_0) - 1.$$

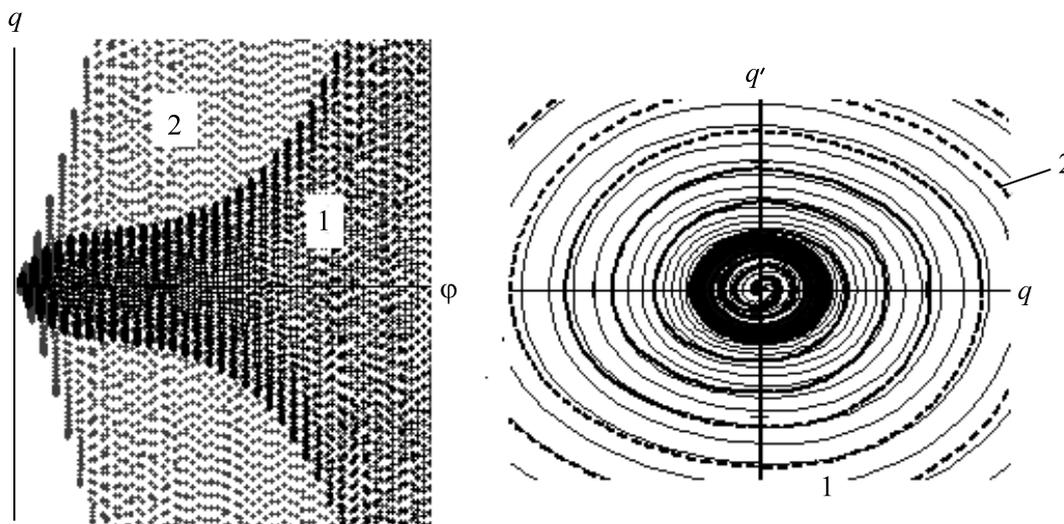


Рис. 7. Влияние  $\Delta\gamma$  на резонанс при  $\vartheta < 2\vartheta^*$ : 1 –  $\Delta\gamma = \pi/2$ ; 2 –  $\Delta\gamma = 0$

Параметр  $L$  отражает влияние параметрического возбуждения, а параметр  $s$  – высокочастотную компоненту вынуждающей силы. При  $L \rightarrow 1$  нарушаются условия динамической устойчивости, поэтому  $\chi_1 \rightarrow \infty$  независимо от значения  $s$ .

#### Некоторые нелинейные эффекты

В общем плане аналитические методы исследования приведены в работах [7–10] и конкретизированы применительно к ряду прикладных задач в работах [3, 4, 10, 11, 17, 18]. Здесь мы акцентируем внимание на анализе результатов компьютерного моделирования для ряда резонансных режимов, иллюстрирующих нелинейные эффекты в рассматриваемом классе задач.

Обратимся к уравнению (1), которое дополним учетом нелинейных упругодиссипативных характеристик  $f(q, \dot{q})$  и  $P(q) = K(q) / J_1$ :

$$(1 + \mu \Pi_*'^2) \ddot{q} + f(q, \dot{q}) + k^2(1 + \zeta \Pi_*'^2) P(q) = w \sin \omega t \cos \Omega t - 0,5 \mu \omega^2 \sin 2\omega t; \quad (16)$$

$$w(t) = M_* \cos(\Omega t) \Pi_*' / J_1,$$

где  $M_*, \Omega$  – амплитуда и частота момента, приложенного к выходному звену (см. рис. 1).

Таким образом, колебательная система подвержена бигармоническому возбуждению при  $\Omega \gg \omega$ .

Согласно (3),  $f(q, \dot{q}) = |f_0| u(|\dot{q}| - |v|) \text{sign} \dot{q}$ .

В уравнении (16) опущена гироскопическая составляющая, пропорциональная  $\dot{q}$ , работа которой за период  $2\pi / \omega$  обращается в ноль.

В отмеченных выше работах обычно принималось вязкое трение и не учитывалось влияние высокочастотных колебаний на диссипативные силы ( $w = 0$ ). Случай  $w \neq 0$  при вязком трении исследован в работе [12]. Здесь эта задача исследуется при учете нелинейных диссипативных сил.

Пусть  $\Pi' = h \sin \varphi$ ,  $\Pi'' = h \cos \varphi$ , а нелинейная восстанавливающая сила отвечает муфте с кубической характеристикой. Тогда  $P(q) = q(1 + \beta q^2)$ , а «собственная» частота после гармонической линеаризации равна

$$p(\varphi, A) = k \sqrt{(1 + \zeta \Pi_*'^2) ((1 + 0,75 \beta A^2) / (1 + \mu \Pi_*'^2))}. \quad (17)$$

Коэффициент  $\beta$  зависит от конкретных условий задачи и определяет нелинейный характер динамического процесса.

Остановимся на анализе некоторых результатов компьютерного моделирования, проведенного на основании уравнения (16). Для более четкого выявления динамических эффектов, связанных с амплитудной модуляцией вынуждающей силы, примем в (1)  $\mu = \zeta$ , что соответствует условию квазистационарности

(см. выше). При этом нестационарная связь в явном виде отсутствует и, на первый взгляд, параметрических эффектов ожидать не следует. На рисунке 8 показан близкий к параметрическому возбуждению режим, когда нелинейность упругой характеристики привела к локальным нарушениям динамической устойчивости, которые чередуются со срывами, образуя интенсивный режим биений ( $\beta = -0,25$ , линии 1). В то же время, при  $\beta = 0$  вынужденные колебания почти незаметны (линии 2).

Максимальная амплитуда  $A_{\max}$ , отвечающая срыву колебаний, определяется из уравнения

$$\vartheta_0 \Phi(\lambda_0(A_{\max})) A_{\max} (1 + 0,75 \beta A_{\max}^2) = \pi w;$$

$$\lambda_0(A_{\max}) = A_{\max} \omega / \Omega.$$

Влияние высокочастотного возбуждения на пороговое значение диссипативных сил показано на рис. 9. Приведенные фазовые портреты отвечают критическим режимам на границе области динамической устойчивости. В первом случае (см. рис. 9, а) не учтено высокочастотное возбуждение при  $\vartheta_0 = 0,16$ ;  $\Phi = 1$ ; во втором (см. рис. 9, б) – оно учтено ( $\vartheta_0 = 0,24$ ;  $\Phi < 1$ ). В последнем случае реализация порогового значения условий динамической устойчивости потребовала более высокого уровня диссипации и была осуществлена при больших амплитудах.

Коротко остановимся на уже упоминавшемся выше эффекте – возбуждении низкочастотных резонансов на частоте биений. Воспользовавшись применительно к данной задаче методом выделения медленных движений, приведенным в работе [12], можно показать, что нелинейная составляющая восстанавливающей силы описывается зависимостью

$$P(q) = k^2 [1 + 1,5 \beta h (\omega^2 / \Omega^2) \sin^2 \varphi + \beta q^2] q.$$

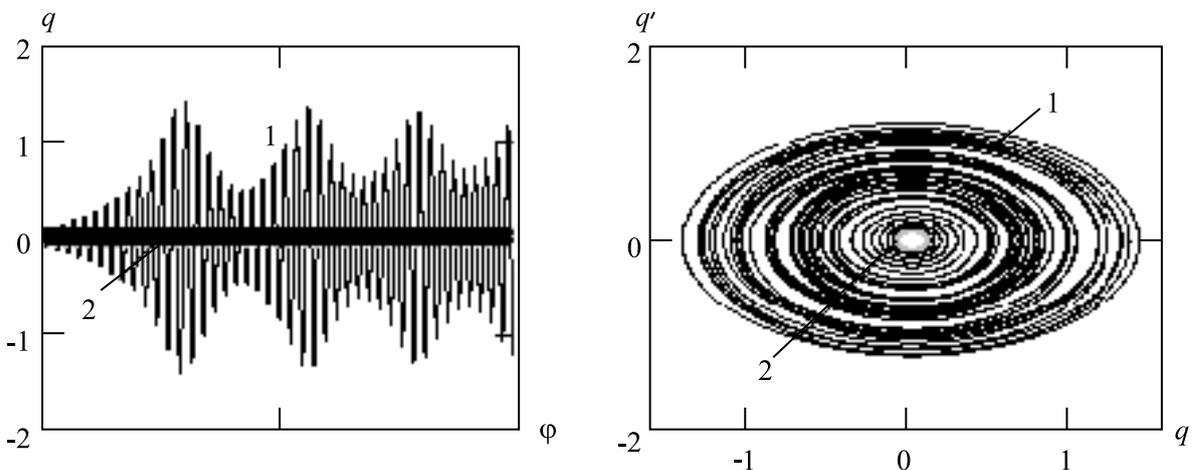


Рис. 8. Компьютерное моделирование режима биений: 1 –  $\beta = -0,25$ ; 2 –  $\beta = 0$

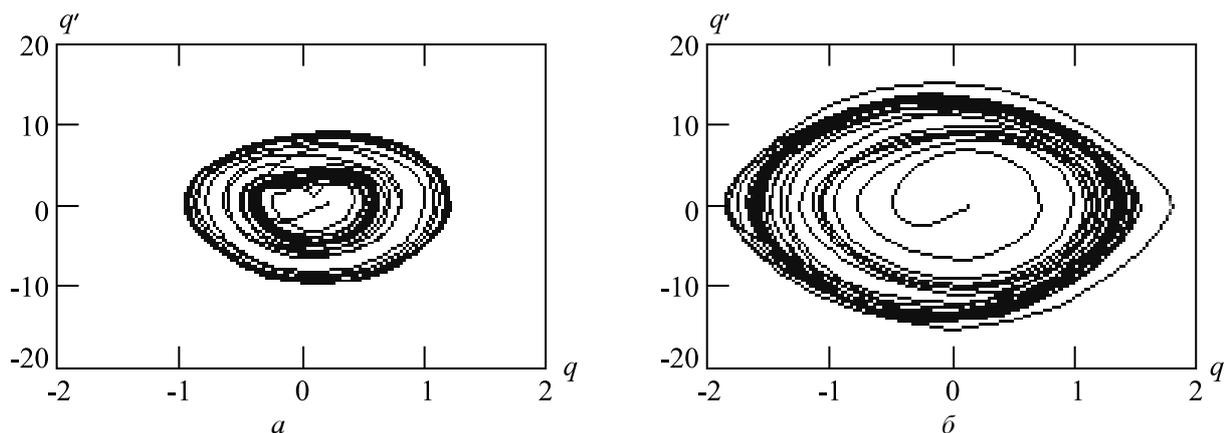


Рис. 9. Фазовые портреты при нелинейной диссипативной силе:  $a - \vartheta_0 = 0,16, \Phi = 1$ ;  $b - \vartheta_0 = 0,24, \Phi < 1$

Графики на рис. 10 показывают, как нелинейность упругой характеристики преобразует исходный режим биений (см. рис. 10,  $a$ ;  $\beta = 0$ ). При  $\beta \neq 0$  колебания приобретают бигармонический характер (см. рис. 10,  $b$ ). На графике (см. рис. 10,  $в$ ) в колебаниях отфильтрована высшая гармоника.

Остановимся на физической природе исследуемого эффекта и, в частности, установим, почему резонансные колебания на частоте  $\omega$  возможны лишь в нелинейной системе. Согласно уравнению (16), вынуждающая сила пропорциональна  $\sin \omega t \cos \Omega t = 0,5[\sin(\omega + \Omega)t + \sin(\Omega - \omega)t]$ .

Таким образом, на систему действуют две вынуждающие силы с близкими частотами. При отсутствии нелинейности ( $\beta = 0$ ) справедлив принцип суперпозиции, поэтому эти силы приводят к режиму биений, причем предпосылки для возникновения низкочастотного резонанса отсутствуют.

Амплитуда возбуждения пропорциональна

$$|\sin \omega t| \approx \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t\right),$$

что при нелинейной функции  $P(q)$  приводит к пульсации собственной частоты  $p(A)$ . Это,

в свою очередь, создает ситуацию, близкую к параметрическому возбуждению. В инженерной практике нелинейность восстанавливающей силы нередко обусловлена наличием зазоров [3, 4, 13]. Как показал анализ, при решении данной задачи хорошее совпадение с результатами численного эксперимента дает малотрудоемкий способ прямой линеаризации Я.Г. Пановко [19].

### Заключение

Интенсификации производственных процессов, в конечном итоге, всегда сопутствует рост рабочих скоростей, что, в свою очередь, диктует необходимость более глубокого и разностороннего учета динамических факторов. Проблемам динамики машин посвящено большое число монографий и учебных пособий, что представляется естественным, так как этому разделу машиноведения свойственно не только большое разнообразие задач, но и многоступенчатость при анализе одной и той же проблемы. Последнее связано как с целевой направленностью при решении конкретной инженерной задачи, так и с большим числом условий и факторов, определяющих конечный результат

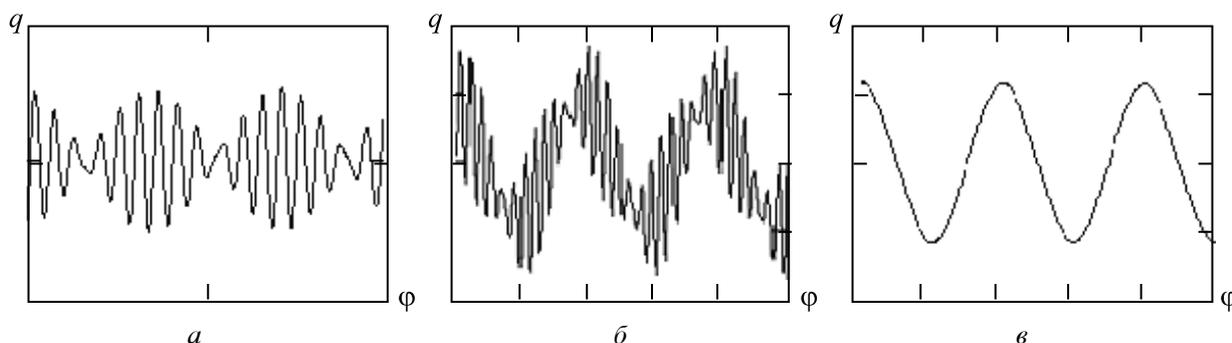


Рис. 10. Трансформация режима биений:

$a - \beta = 0$ ;  $b - \beta = -0,25$  при бигармонических колебаниях;  $v - \beta = -0,25$  – низкочастотный режим

с учетом особенностей различных технологических машин.

В данной статье получили свое дальнейшее развитие методы решения ряда нелинейных задач динамики цикловых машин. В частности, исследованы и предложены способы снижения виброактивности и подавления некоторых нежелательных динамических эффектов, возникающих при совместных силовых и параметрических возмущениях с учетом взаимовлияния медленных и быстрых движений. Ряд вопросов, относящихся к данной проблеме, требует дальнейшего исследования и нуждается в отдельном рассмотрении.

### Список литературы

1. Вульфсон И.И. Динамические расчеты цикловых механизмов. Л.: Машиностроение. 1976. – 328 с.
2. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.
3. Вульфсон И.И. Динамика цикловых машин. СПб.: Политехника, 2013. – 425 с.
4. Vulfson I. Dynamics of cyclic machines. Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. – 410 p.
5. Вульфсон И.И. К проблеме квазистационарности динамических характеристик цикловых механизмов // Теория механизмов и машин. 2015. № 1. С. 6–15.
6. Vulfson I.I. Quasistationarity of dynamic modes in cyclic mechanisms forming rheonomic oscillating systems with lattice structure // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. Vol. 44. No. 4. P. 312–318.
7. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. – 432 с.
8. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.
9. Фреман Н., Фреман П.У. ВКБ-приближение. М.: Мир, 1967. – 168 с.
10. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.
11. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 600 с.
12. Коловский М.З. О влиянии высокочастотных возмущений на резонансные колебания в нелинейной системе // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ. № 226. М., Л.: Машгиз, 1963. С. 7–17.
13. Вульфсон И.И. Нелинейные резонансные колебания привода на частоте амплитудной модуляции высокочастотного возбуждения // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 6. С. 17–22.
14. Вульфсон И.И. О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени // Прикладная математика и механика. 1969. № 2. Т. 33. С. 331–337.
15. Блехман И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. СПб.: Изд. дом «Руда и Металлы», 2013. – 639 с.
16. Вульфсон И.И. Влияние низкочастотных колебаний на нелинейные диссипативные силы // Изв. вузов «Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн». 2012. № 4. Т. 20. С. 1–15.
17. Vulfson I.I. Some nonlinear effects of machine dynamics // Journal of Vibroengineering. 2008. Vol. 10. No. 4. P. 442–450.
18. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамики машин. Л.: Машиностроение, 1968. – 284 с.
19. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение. 1976. – 320 с.

Материал поступил в редакцию 30.06.2015

**ВУЛЬФСОН**  
**Иосиф Исаакович**  
E-mail: [jvulf@yandex.ru](mailto:jvulf@yandex.ru)  
Тел.: (812) 662-09-26

Доктор технических наук; заслуженный деятель науки РФ; профессор кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна.  
Сфера научных интересов – механика машин; теория колебаний. Автор более 500 научных статей, 11 монографий (в том числе четыре изданы в международном изд-ве Шпрингер и в США); пяти изобретений (в соавторстве); двух справочников (в соавторстве).