

ЧИСЛЕННАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ УПРОЩЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШАРИКОВОГО ПОДШИПНИКА

О.С. Нарайкин, Ф.Д. Сорокин, Е.П. Банин

В статье рассматривается математическая модель шарикового подшипника с торовыми дорожками качения. В основе моделирования лежит подход де Муля. Элементы матрицы жесткости подшипника в отличие от других подходов вычисляются с помощью двойного дифференцирования энергии деформации шариков. В работе ставится задача экспериментальной и численной проверки модификации подхода де Муля применительно к шариковым подшипникам. Элементы матрицы жесткости, полученные непосредственно из реализации модифицированного метода де Муля, проверяются в численном и натурном экспериментах. Экспериментальная и численная проверки показали хорошее соответствие результатам, полученным в упрощенной математической модели.

Ключевые слова: шариковый подшипник, матрица жесткости, метод конечных элементов, моделирование, экспериментальная проверка.

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL VERIFICATION OF A SIMPLIFIED MATHEMATICAL MODEL OF BALL BEARINGS

E.P. Banin, O.S. Narajkin, F.D. Sorokin

In this paper, a mathematical model of a ball bearing with torus raceways is considered. The modeling based on the de Mul's approach. The elements of the stiffness matrix bearing calculated by double differentiating the strain energy of balls unlike other similar works. The objective of this paper is experimental and numerical verification of the de Mul modified approach applied to ball bearings. Elements of stiffness matrix obtained directly from the implementation of the de Mul modified method, are checked in numerical and natural experiments. The experimental and numerical tests showed good agreement among results obtained in a simplified mathematical model.

Keywords: ball bearing, stiffness matrix, finite element method, experimental verification.

Введение

Подшипниковые узлы (ПУ) являются важнейшими структурными элементами машин и приборов и составляют основную часть узлов трения. Поломка ПУ является одной из основных причин отказов техники, ограничивая, таким образом, долговечность машин и приборов [1].

Применяемые в технике ПУ представляют собой сложные механические системы. В особенности трудны для описания и расчета ПУ с подшипниками качения. ПУ состоит из ротора, корпуса, подшипников, системы сма-

зывания, уплотнений, демпферов, элементов привода.

Подшипник – одна из важнейших составных частей ПУ. Подшипник состоит из наружного и внутреннего колец, тел качения (шариков или роликов) и сепаратора.

Учет влияния подшипника на вал ротора – важная задача, которая решается при проектировании [2-4]. Для решения таких задач часто используют метод конечных элементов (МКЭ) [5-7], который обладает хорошими возможностями для расчета сложных систем, но для решения необходимы очень большие затраты

компьютерного времени. Даже современные численные методы не всегда могут обеспечить хорошую сходимость в решении таких задач. Для приемлемого решения необходимо использовать структурированную сетку, большое количество элементов в контактных областях, что в свою очередь увеличивает количество машинного времени на решение поставленной задачи. Стоит отметить, что задача контакта в подшипнике – это задача двойного взаимодействия шарика с дорожками качения, что еще больше усложняет процесс решения.

При моделировании динамики механизмов, содержащих большое количество ПУ, использование МКЭ с разбиением колец и шариков на большое количество конечных элементов становится практически неосуществимым, так как контактную задачу приходится решать несколько раз на каждом шаге численного интегрирования по времени. Поэтому составление относительно простых, не требующих больших затрат машинного времени моделей подшипников – важная задача. Существует большое число моделей различной сложности для учета жесткости подшипника качения [8–14]. Один из способов создания простой модели подшипника качения предложен в работах де Муля [15, 16].

В работе [3] с помощью простых геометрических соотношений и уравнений теории Герца удается записать зависимости для элементов матрицы жесткости шарикового подшипника. Подход позволяет достаточно эффективно учитывать влияние различной геометрии шариковых подшипников на вал (например, ветрогенератора, авиационного двигателя или коробки передач). Основными преимуществами подхода де Муля являются: простая реализация алгоритма на любом свободно распространяемом языке программирования, отсутствие сложных вычислительных процедур, уменьшение затрат машинного времени (по сравнению с МКЭ). Основное отличие алгоритма, реализованного в работе, от алгоритма де Муля заключается в вычислении элементов матрицы жесткости посредством двукратного дифференцирования внутренней энергии деформации шариков.

Очевидно, что с точки зрения возможности использования упрощенной модели ПУ в практике проектирования, важнейшей задачей является подтверждение необходимой степени их соответствия реальным объектам и достоверности полученных результатов.

Цель работы – численная и экспериментальная проверка элементов матрицы жесткости шарикового подшипника, полученной на основе модифицированного алгоритма де Муля.

Определяющие соотношения и допущения

В аналитической модели шарикового подшипника принимаются во внимание только упругие деформации в области контакта, без учета трения. Кольца считаются абсолютно жесткими, учитываются только деформации, связанные с контактным взаимодействием. Контакт шариков с дорожками качения рассматривается по теории Герца. Используются следующие системы координат (рис. 1): декартова глобальная система координат (ГСК), связанная с внутренним кольцом, и цилиндрическая система координат (ЦСК), являющаяся локальной системой координат.

Считается, что каждое кольцо имеет шесть степеней свободы. Положение шарика определяется перемещением колец (рис. 2): D_a – диаметр шарика; r_i и r_e – радиусы кривизны дорожек качения в плоскости, проходящей через ось Z , для внутреннего и внешнего колец, соответственно; Δ_i и Δ_e – первоначальные зазоры между шариком и дорожкой качения для внутреннего и внешнего колец, соответственно; α_0 – начальный угол контакта.

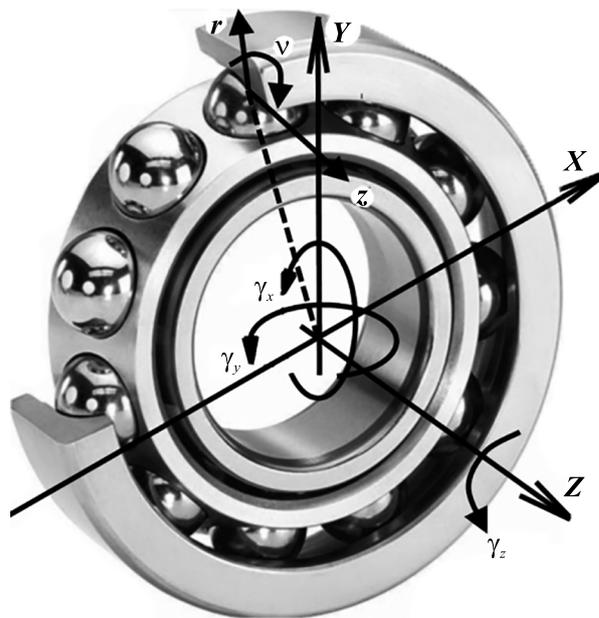


Рис. 1. Глобальная (XYZ) и цилиндрическая системы координат (zvr)

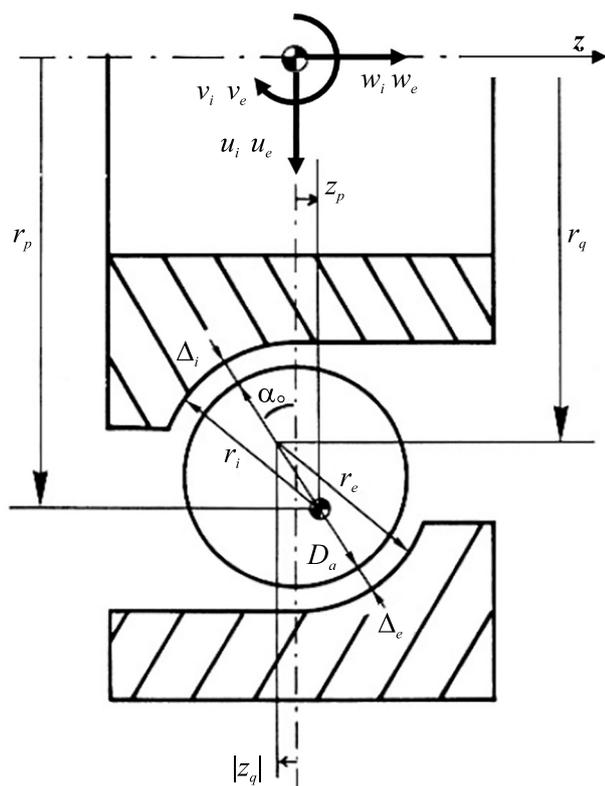


Рис. 2. Подшипник в плоскости, проходящей через центр шарика [1]

Вектор перемещений колец в цилиндрической системе координат:

$$\mathbf{y} = \{w_i, u_i, v_i, w_e, u_e, v_e\}^T,$$

где w – перемещение по оси Oz ; u – перемещение в радиальном направлении; v – угловое перемещение; i, e – индексы, соответствующие перемещениям внутреннего и внешнего колец, соответственно.

Координаты центров контактных окружностей (r_p, z_p) и (r_q, z_q) в деформированном состоянии вычисляются из простейших геометрических соотношений:

$$z_p^+ = w_i + z_p \cos v_i - r_p \sin v_i,$$

$$r_p^+ = u_i + r_p \cos v_i - z_p \sin v_i,$$

$$z_q^+ = w_e + z_q \cos v_e - r_q \sin v_e,$$

$$r_q^+ = u_e + r_q \cos v_e - z_q \sin v_e.$$

Расстояние между центрами окружностей в деформированном состоянии представимо в виде:

$$l = \sqrt{(z_q^+ - z_p^+)^2 + (r_q^+ - r_p^+)^2}.$$

Результирующий зазор для предварительно поджатого шарика:

$$\delta = r_i + r_e - l - D_a.$$

Инерция от вращения шарика не учитывается. Вследствие такого допущения нет необходимости вводить обозначения для расстояния от центра шарика до дорожек качения. Центр шарика, в таком случае, будет всегда находиться на линии, соединяющей центры кривизны дорожек качения [1, 2, 16].

При отрицательном суммарном зазоре δ происходит упругий контакт. Поскольку дорожки могут иметь разную геометрию, а кольца могут быть изготовлены из разных материалов, то, в общем случае, контакт с каждым из колец описывается различными упругими постоянными. Используя соотношения теории Герца, представленные в работе [3], получим:

$$Q_i = C_{int} g_i^{\frac{3}{2}}; \quad (1)$$

$$Q_e = C_{ext} g_e^{\frac{3}{2}},$$

где Q_i и Q_e – контактные силы от взаимодействия шарика с внутренним и внешним кольцом, соответственно; g_i, g_e – поджатие шарика со стороны внутренней и внешней дорожки качения, соответственно; C_{int}, C_{ext} – константы, зависящие от кривизны и механических характеристик материала, соответственно. Соотношения для расчета C_{int}, C_{ext} взяты из [3].

В случае отсутствия сил инерции вращения справедливы соотношения:

$$\begin{cases} Q_i = Q_e \\ g_i + g_e = -\delta. \end{cases} \quad (2)$$

После подстановки в систему (2) соотношений (1) получаем:

$$g_i = C_{ext}^{\frac{2}{3}} \frac{|\delta|}{C_{ext}^{\frac{2}{3}} + C_{int}^{\frac{2}{3}}}; \quad (3)$$

$$g_e = C_{int}^{\frac{2}{3}} \frac{|\delta|}{C_{ext}^{\frac{2}{3}} + C_{int}^{\frac{2}{3}}}.$$

Энергия шарика складывается из энергии упругих контактов с двумя кольцами

$$U = \frac{2}{5} C_{int} g_i^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5} C_{ext} g_e^{\frac{5}{2}}. \quad (4)$$

Подстановка (3) в (4) приводит к выражению для энергии шарика, в котором зазор представлен как суммарный:

$$U = \frac{2}{5} C(-\delta)^{\frac{5}{2}}; \quad (5)$$

$$C = C_{int} \left(\frac{C_{ext}^{\frac{2}{3}}}{C_{ext}^{\frac{2}{3}} + C_{int}^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{5}{2}} + C_{ext} \left(\frac{C_{int}^{\frac{2}{3}}}{C_{ext}^{\frac{2}{3}} + C_{int}^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{5}{2}}.$$

Элементы вектора сил f_i и матрицы жесткости k_{ij} получаются дифференцированием (5):

$$f_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad k_{ij} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j},$$

где y_i и y_j – элементы вектора перемещений y .

Рассмотрим подход для учета жесткости от одного шарика, ЦСК zrv которого повернута на угол φ . В ГСК подшипник имеет 12 степеней свободы. Вектор перемещений колец g в таком случае в ГСК:

$$g = \left\{ \delta_x^i, \delta_y^i, \delta_z^i, \gamma_x^i, \gamma_y^i, \gamma_z^i, \delta_x^e, \delta_y^e, \delta_z^e, \gamma_x^e, \gamma_y^e, \gamma_z^e \right\}^T,$$

где $\delta^{i,e}$ и $\gamma^{i,e}$ – линейные и угловые перемещения для внутреннего (i) и внешнего (e) колец, соответственно.

Каждый шарик в подшипнике имеет свое фиксированное угловое положение φ_j (рис. 3).

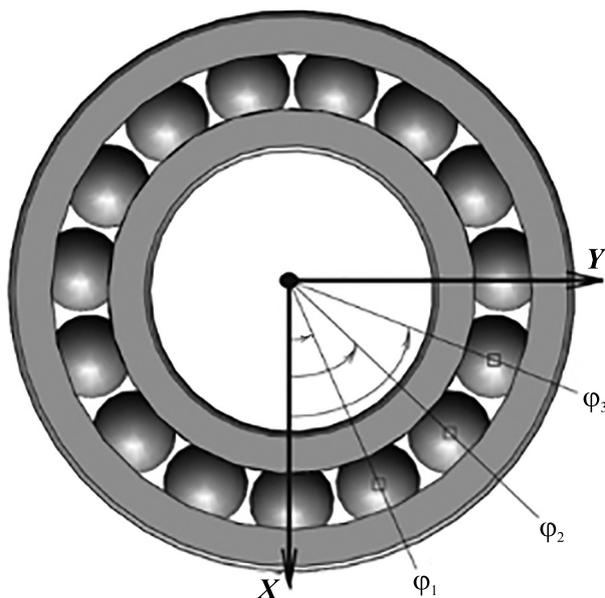


Рис. 3. Угловые положения шариков в подшипнике

Для перехода от ЦСК к ГСК составлена матрица перехода L между системами координат:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{11} \end{bmatrix};$$

$$L_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & r_p \sin \varphi & -r_p \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & -z_p \sin \varphi & z_p \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм получения матрицы перехода представлен в [14, 15].

Связь перемещений в ЦСК и глобальных степеней свободы имеет вид:

$$y = Lg.$$

Матрица жесткости K всего подшипника (размером 12×12) была получена суммированием с учетом соответствующих матриц трансформации всех локальных матриц жесткостей k_j (размером 6–6), полученных при рассмотрении каждого шарика по отдельности, при общем количестве шариков n :

$$K = \sum_{j=1}^n L_j^T k_j L_j.$$

Верификация с помощью метода конечных элементов

Для проверки элементов матрицы жесткости, полученных с помощью модифицированного подхода де Муля, использовалась среда конечно-элементного моделирования ABAQUS [17]. Геометрические параметры модели подшипника представлены на рис. 4.

Твердотельная модель дискретизировалась двадцати узловыми квадратичными изопараметрическими конечными элементами (рис. 5).

Сложность решения контактной задачи заключается в том, что контактное взаимодействие шарика с дорожками качения происходит по двум поверхностям, и шарик имеет возможность свободно поворачиваться вокруг центра. Отсутствие трения в контакте дает проскальзывание шарика, что приводит к расходимости численного метода на первой же итерации.

Для устранения расходимости численной процедуры шарик вводился в контакт последовательно: сначала с внутренним кольцом, потом с внешним кольцом (трение не учитывалось). Внешнее кольцо жестко закреплено

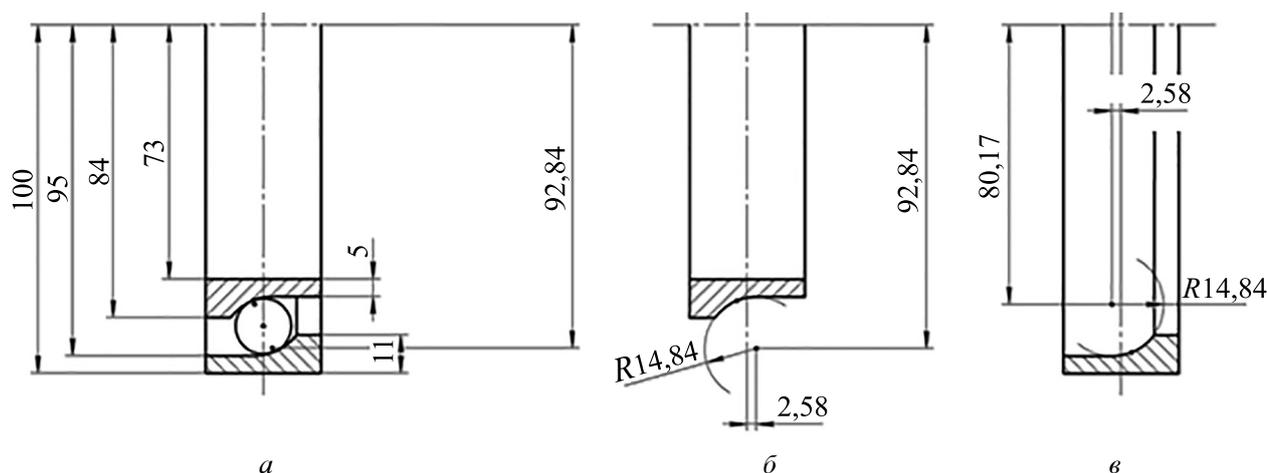


Рис. 4. Эскиз модели подшипника:

a – подшипник; *b* – внутреннее кольцо; *в* – внешнее кольцо

(ограничены все степени свободы), нагружение производилось кинематически в радиальном и осевом направлениях. Для устранения проскальзывания шарика в расчет вводились пружины жесткостью 1000 Н/м. Жесткость пружин на несколько порядков меньше жесткости всего подшипника. Пружины являются фиктивными и на напряженное состояние не влияют.

Для получения жесткости подшипника K_{11} в радиальном направлении внутреннее кольцо подшипника было смещено на величину 100 мкм в радиальном направлении. Значение искомой жесткости вычислялось по величине отношения полученной суммарной реакции в радиальном направлении к заданному перемещению. Аналогично были получены другие элементы матрицы жесткости подшипника. Проверка симметрии матрицы жесткости сопоставлением элементов K_{13} и K_{31} показала расхождение не более чем на 5 %. Расхождение

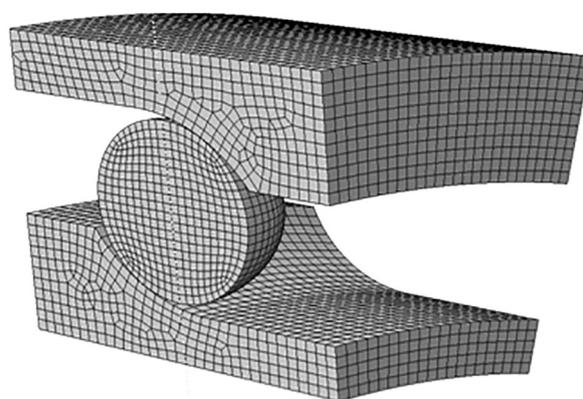


Рис. 5. Фрагмент конечно-элементной модели подшипника

между суммарными реакциями на внешнем и внутреннем кольцах не превышало 5 %. В качестве дополнительной проверки получена жесткость K_{11} для модели с 14 шариками. Результаты сравнения жесткостей, полученных по МКЭ и с помощью модифицированного алгоритма де Муля, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения жесткости, полученные по МКЭ и модифицированному алгоритму де Муля

Элемент матрицы жесткости	Жесткость, $\frac{МН}{м}$		Относительное расхождение, %
	Программа	МКЭ	
Модель с одним шариком			
K_{11}	54,8	58,6	6,4
K_{31}	22,0	23,0	4,3
K_{13}	22,0	23,5	6,3
K_{11}	9,1	10,0	9,0
Модель с 14-ю шариками			
K_{11}	170,0	187,0	9,0

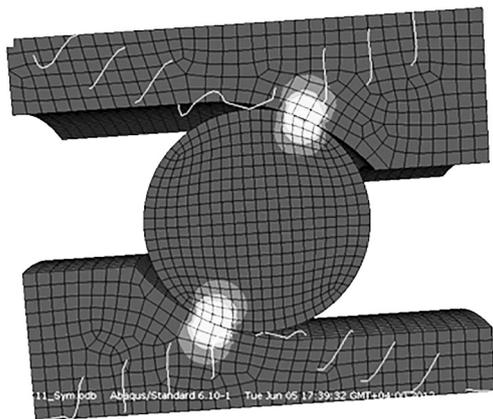


Рис. 6. Распределение напряжений (Па) в подшипнике с одним шариком при нагружении в радиальном направлении

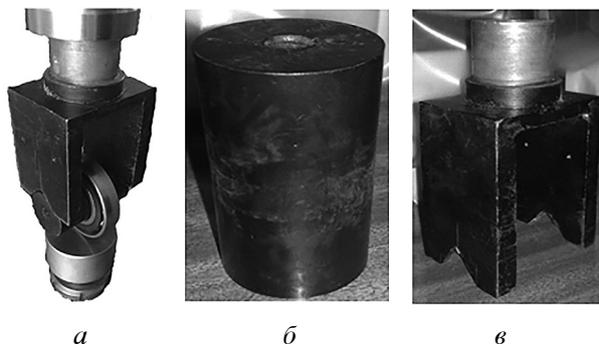


Рис. 7. Подшипник с оснасткой (а), цилиндр (б), вилка (в)

Экспериментальная верификация

В качестве объекта для экспериментальной проверки элементов матрицы жесткости, полученных посредством модифицированного алгоритма де Муля, использован радиально-упорный шариковый подшипник 36209. Материал внутреннего и внешнего колец, а также шарика – сталь ШХ15.

Геометрические параметры подшипника 36209 взяты из справочника [18]. Статические испытания по проверке жесткости подшипника в радиальном направлении K_{11} проводились на универсальном испытательном стенде *Quasar 50* (*GALDABINI*, Италия), предназначенном для испытаний образцов и элементов конструкций на растяжение и сжатие (табл. 2).

Контроль сжатия подшипника проводился по силе. Нагружение проводилось до 25 кН (значение, близкое к статической грузоподъемности подшипника); скорость траверсы – 1 мм/мин.

На рисунке 7 представлены элементы оснастки и подшипник: оснастка состоит из двух элементов – жесткой вилки и жесткого цилиндра диаметром, соответствующим внутреннему диаметру подшипника.

Конструкция нагружалась пять раз, разгрузка производилась вручную. Данные по жесткостям усреднялись. Нагрузочная характеристика получена для двух вариантов расположения шариков (рис. 8):

- 1) один из шариков находится на оси нагружения;
- 2) два шарика расположены симметрично относительно оси нагружения.

Соответствующие нагрузочные характеристики показаны на рис. 9.

Для получения нагрузочной характеристики подшипника необходимо исключить жесткость вилки из жесткости всей конструкции. На рисунке 10 показана нагрузочная характеристика вилки, которая для большей наглядности приведена вместе с нагрузочной характеристикой всей системы подшипник–оснастка. Вилка нагружалась три раза, данные по жесткости усреднялись.

Таблица 2

Характеристики испытательной машины *Quasar 50*

Наименование параметра	Значение параметра
Тип силовозбуждающего устройства	электромеханический
Максимальная нагрузка, кН	50
Минимальная (измеряемая) нагрузка, Н	0,5
Скорость перемещения активного захвата, мм/мин	1–200
Погрешность измерения силы не более от измеряемого значения силы, %	±1
Погрешность измерения перемещений активного захвата не более, %	±1
<i>Примечание:</i> машина снабжена вычислительным комплексом, позволяющим разрабатывать индивидуальную программу испытаний. Возможно малоцикловое нагружение образцов.	

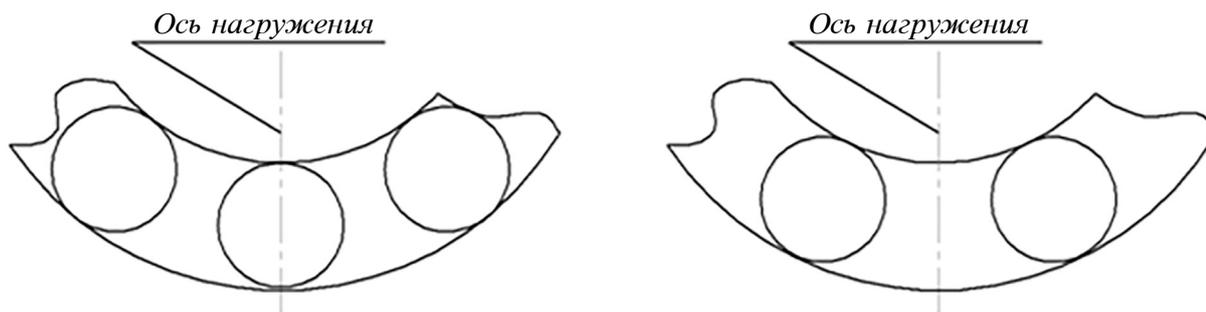


Рис. 8. Варианты расположения шариков относительно оси нагружения

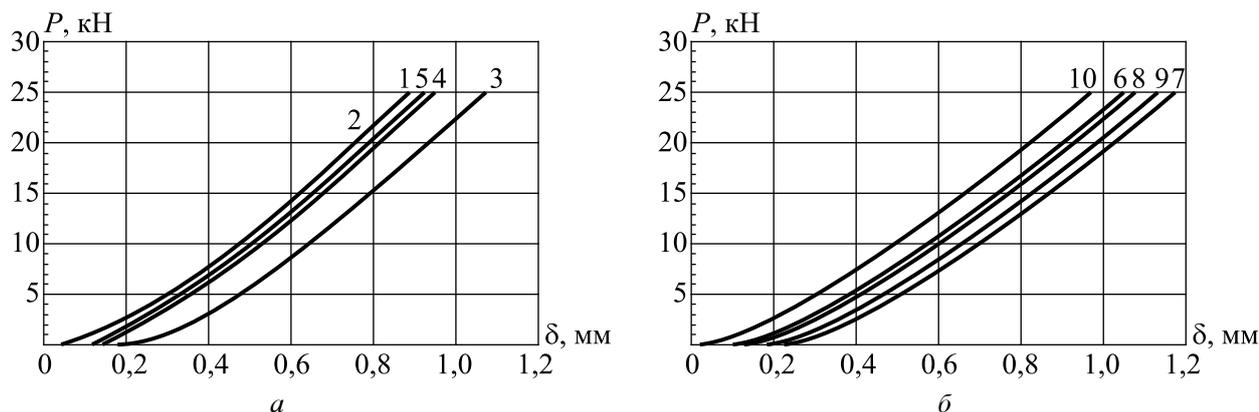


Рис. 9. Нагрузочная характеристика системы для первого (а) и второго (б) вариантов нагружения: 1...10 – номера экспериментов

Для получения нагрузочной характеристики подшипника без учета жесткости вилки пересчет выполнялся по формуле для последовательно соединенных упругих пружин:

$$K_{tot} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}, \quad (6)$$

где K_1 – жесткость подшипника; K_2 – жесткость вилки; K_{tot} – жесткость системы.

Из формулы (6) получим соотношение для жесткости подшипника без учета вилки:

$$K_1 = \frac{K_{tot} K_2}{K_2 - K_{tot}}.$$

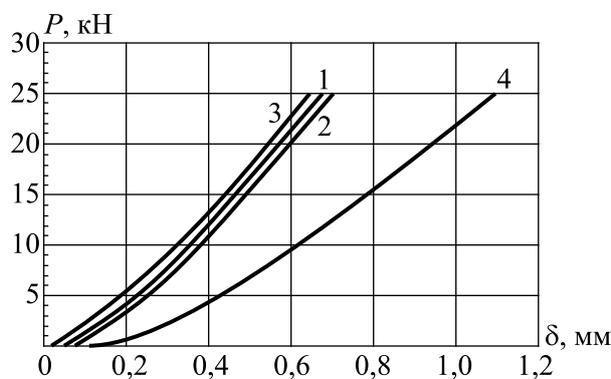


Рис. 10. Нагрузочные характеристики вилки (1-3) и конструкции (4) в случае второго варианта нагружения

Таблица 3

Значения жесткости, полученные по модифицированному алгоритму де Муля и в эксперименте

Элемент матрицы жесткости	Жесткость, $\frac{МН}{м}$		Относительное расхождение, %
	Программа	Эксперимент	
Подшипник 36209			
K_{11} (вариант 1)	19,2	18,3	4,6
K_{11} (вариант 2)	18,2	17,1	6,0

Сравнение экспериментальных данных с расчетными результатами, полученными с использованием модифицированного подхода де Муля, приведено в табл. 3.

Сравнение полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что упрощенный подход к расчету матрицы жесткости дает удовлетворительные результаты при существенном сокращении машинного времени для вычислений.

Заключение

В работе выполнена численная и экспериментальная верификация упрощенной математической модели шарикового подшипника. Упрощение состоит в замене каждого из шариков нелинейно упругой пружиной, положение и поджатие которой зависит от перемещений и поворотов колец.

Матрица жесткости подшипника была найдена формальным двукратным дифференцированием по обобщенным перемещениям суммарной энергии всех шариков.

Численная верификация, выполненная МКЭ с использованием объемных конечных элементов, показала, что погрешность упрощенной модели подшипника составляет около 9 %. При этом расчет по упрощенной модели обладает высоким быстродействием, что принципиально важно для моделирования механизмов, состоящих из большого количества подшипниковых узлов.

Сравнение с натурным экспериментом также дало хорошее совпадение результатов.

Список литературы

1. *Harris T.A., Kotzalas M.N.* Rolling bearing analysis // CRC Press. Fifth Edition, 2006. P. 183–231.
2. *Gunduz A., Singh R.* Stiffness matrix formulation for double row angular contact ball bearings: Analytical development and validation // *Journal of Sound and Vibration*. 2013. Vol. 332. No. 22. P. 5898–5916.
3. Analysis of bearing stiffness variations, contact forces and vibrations in radially loaded double row rolling element bearings with raceway defects / *D. Petersen et al.* // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2015. Vol. 50. P. 139–160.
4. Static capacity of a large double row slewing ball bearing with predefined irregular geometry / *P. Göncz et al.* // *Mechanism and Machine Theory*. 2013. Vol. 64. P. 67–79.
5. *Kania L., Krynke M., Mazanek E.A.* Catalogue capacity of slewing bearings // *Mechanism and Machine Theory*. 2012. Vol. 58. P. 29–45.
6. *Göncz P., Drobne M., Glodež S.* Computational model for determination of dynamic load capacity of large three-row roller slewing bearings // *Engineering Failure Analysis*. 2013. Vol. 32. P. 44–53.
7. Analyses of contact forces and vibration response for a defective rolling element bearing using an explicit dynamics finite element model / *S. Singh et al.* // *Journal of Sound and Vibration*. 2014. No 21. Vol. 333. P. 5356–5377.
8. *Wardle F.P., Lacey S.J., Poon S.Y.* Dynamic and static characteristics of a wide speed range machine tool spindle // *Precision Engineering*. 1983. Vol. 5. No. 4. P. 175–183.
9. *Gargiulo E.P.* A simple way to estimate bearing stiffness // *Machine Design*. 1980. Vol. 52. No. 17. P. 107–110.
10. *While M.F.* Rolling element bearing vibration transfer characteristics: effect of stiffness // *Journal of applied mechanics*. 1979. Vol. 46. No. 3. P. 677–684.
11. *Kraus J., Blech J.J., Braun S.G.* In situ determination of rolling bearing stiffness and damping by modal analysis // *Journal of Vibration and Acoustics*. 1987. Vol. 109. No. 3. P. 235–240.
12. *Cao Y., Altintas Y.A.* general method for the modeling of spindle-bearing systems // *Journal of Mechanical Design*. 2004. Vol. 126. No. 6. P. 1089–1104.
13. *Jones A.B.* A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions // *Journal of Fluids Engineering*. 1960. Vol. 82. No. 2. P. 309–320.
14. *Леонтьев М.К., Снеткова Е.И.* Нелинейные модели подшипников качения в роторной динамике // *Вестник московского авиационного института*. 2012. Т. 19. № 2. С. 134–145.

15. *De Mul J.M., Vre J.M.e, Maas D.A.* Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction. Part I: General theory and application to ball bearings // *Journal of Tribology*. 1989. Vol. 111. No. 1. P. 142–148.
16. *De Mul J.M., Vre J.M.e, Maas D.A.* Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction. Part II: Application to roller bearings and experimental verification // *Journal of Tribology*. 1989. Vol. 111. No. 1. P. 149–155.
17. *Hibbitt, Karlsson, Sorensen.* ABAQUS/standard user's Manual. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, 2001. Vol. 1.
18. *Бейзельман Р.Д., Цыпкин Б.В., Перель Л.Я.* Подшипники качения. Справочник. М.: Машиностроение, 1975. – 572 с.

Материал поступил в редакцию 12.11.2015

**НАРАЙКИН
Олег Степанович**

E-mail: naraikin@kiae.ru
Тел.: (499) 196-92-32

Доктор технических наук, член-корреспондент РАН, первый заместитель директора по научной работе НИЦ «Курчатовский институт», заведующий кафедрой «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов – конвергентные НБИКС-технологии, мехатроника, нано- и микросистемная техника, механика деформируемого твердого тела, теория информации, биомеханика. Автор одной монографии, более 100 научных работ, девяти изобретений.

**СОРОКИН
Федор Дмитриевич**

E-mail: sorokin_fd@mail.ru
Тел.: (499) 263-64-87

Доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов – механика стержней, пластин и оболочек, тензоры, вычислительная механика, нелинейная динамика машин. Автор более 60 научных статей.

**БАНИН
Евгений Петрович**

E-mail: evg_banin@gmail.com
Тел.: (499) 263-64-87

Аспирант кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер-исследователь НИЦ «Курчатовский институт». Сфера научных интересов – механика стержней, пластин и оболочек, биомеханика, гидродинамика, вычислительная механика, нелинейная динамика машин.