

УДК 539.374

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ КОММУТАТИВНОСТЬ КРИВЫХ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ СТУПЕНЧАТОМ НАГРУЖЕНИИ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

А.В. Хохлов

В статье аналитически изучены общие качественные свойства семейств теоретических кривых ползучести при произвольном ступенчатом нагружении, порождаемых линейным интегральным определяющим соотношением вязкоупругости с произвольной функцией ползучести: зависимость этих свойств от параметров программ нагружения и характеристик функции ползучести, асимптотика, условия затухания памяти, влияние перестановки ступеней нагружения. Доказаны некоммутативность и наличие свойства асимптотической коммутативности кривых ползучести при перестановке ступеней нагружения для произвольной (возрастающей выпуклой вверх) функции ползучести. Выявлена важная роль величины предела производной функции ползучести на бесконечности: его отличие от нуля (например, у моделей Максвелла и стандартного тела) влечет накопление остаточной деформации и отсутствие затухания памяти при ползучести, и потому этот материальный параметр является одним из ключевых в классификации поведения линейных моделей. Выведена формула для остаточной деформации, доказана ее инвариантность относительно перестановок ступеней нагружения. Свойства теоретических кривых ползучести сопоставлены с типичными свойствами экспериментальных кривых вязкоупругопластичных материалов. Выявлены реологические эффекты, которые (не) способны описывать линейное определяющее соотношение, и атрибутивные признаки кривых ползучести, которые могут служить экспериментальными индикаторами неприменимости линейной теории для описания поведения материалов.

Ключевые слова: вязкоупругопластичность, линейная наследственность, ползучесть, ступенчатое нагружение, асимптотика кривых ползучести, затухание памяти, перестановка ступеней нагружения, регулярные и сингулярные модели

ASYMPTOTIC COMMUTATIVITY OF CREEP CURVES AT PIECEWISE-CONSTANT STRESS IN LINEAR THEORY OF VISCOELASTICITY

A.V. Khokhlov

The general equation and basic properties of theoretic creep curves generated by the linear integral constitutive relation of viscoelasticity for arbitrary piecewise-constant stress histories are studied. Their dependence on creep compliance function properties and loading steps parameters is analyzed for an arbitrary (increasing convex-up) creep function. The relations between stress and strain jumps, the creep curves asymptotic behavior at infinity, the fading memory criteria and the influence of stress steps permutation are considered. The governing role of a creep function derivative limit value at infinity is revealed. It is proved for any increasing convex-up creep function that non-zero value of its derivative limit implies accumulation of plastic (non-recoverable) strain and lack of fading memory property (e.g., the Maxwell or Burgers models). Therefore the creep function derivative limit value is one of the key parameters in classifying linear hereditary models. The expression for non-recoverable strain magnitude in terms of loading steps duration and stress values is derived, its invariance on stress steps permutation is shown. It is proved (for an arbitrary creep function) that, although the influence of the first two stress steps permutation is significant, the difference between two creep curves converges to zero with time tending to infinity (even in the case of non-fading memory). This property of creep curves for piecewise-constant stress histories is termed "asymptotic commutativity". The qualitative features of theoretic creep curves are compared to typical test creep curves of viscoelastoplastic materials in order to examine the linear theory abilities to provide an adequate description of basic rheological phenomena related to creep, recovery and cyclic step-wise loading and to indicate the field of its applicability or non-applicability considering creep test data of a material.

Keywords: viscoelastoplasticity, linear integral constitutive equation, creep curves at piecewise-constant loading, creep curves asymptotics, fading memory, loading steps permutation, asymptotic commutativity, regular and singular models.

Введение

Эксперименты на ползучесть при ступенчатом нагружении образцов (с кусочно-постоянным напряжением) – важный вид квазистатических испытаний, позволяющий уловить и исследовать различные аспекты поведения материала и детали реализации многих эффектов, например:

- зависимость кривых ползучести (КП) от уровня напряжения;
- эффекты, сопровождающие скачок напряжения вниз или его быстрое убывание за малый промежуток времени (*dip tests, rate reversal in creep tests, non-monotonic creep behavior*);
- восстановление и остаточную деформацию при полной или частичной разгрузке (*strain recovery*);
- влияние параметров начальной стадии нагружения и перестановки ступеней нагружения;
- затухание памяти (*memory fading*);
- накопление или стабилизацию деформации при циклических нагружениях (*ratcheting, shakedown*) и т.п. [1–16].

Такие эксперименты позволяют собрать более богатую информацию для идентификации и верификации моделей поведения материалов и выявления лучшей из них по сравнению с КП при постоянном напряжении (такие КП все модели описывают адекватно при правильной настройке).

Однако для планирования экспериментов, расшифровки и правильной интерпретации их результатов, верного выбора определяющего соотношения (ОС), его идентификации, настройки, грамотного применения и численной реализации, необходимо точное знание общих свойств теоретических кривых ползучести при ступенчатом (и квазиступенчатом) нагружении (а также кривых релаксации, деформирования и др.), порождаемых рассматриваемым ОС, знание, полученное в результате аналитического изучения их уравнений. Необходимо изучение влияния характеристик материальных функций и параметров программы нагружения (длительностей ступеней нагружения, скачков напряжения, скоростей нагружения на переходных участках и т.п.) на общие качественные свойства теоретических кривых ползучести (интервалы монотонности, выпуклости, точки экстремума и излома, скачки деформации

и скорости деформации, асимптотику при $t \rightarrow \infty$, отклонение от обычной КП при мгновенном нагружении), которые порождает применяемое определяющее соотношение с произвольными материальными функциями (а не только для их конкретных видов). Такое исследование не было выполнено даже для одномерного, линейного, интегрального ОС вязкоупругости (или ОС «нелинейной теории наследственности» Ю.Н. Работнова [3, 17–19]), хотя это было бы весьма полезно для уточнения арсенала его возможностей и области (не)применимости и выявления индикаторов (не)линейности поведения материалов по результатам испытаний. Исследование этих свойств в общем виде (с произвольной функцией ползучести) и даже краткий их перечень отсутствуют в монографиях и обзорах по вязкоупругости, ползучести, механике полимеров и расчету конструкций, в частности, в работах [1–7, 20–24]. Анализ большого количества публикаций (например, [6–9, 12–15, 23], см. подробную библиографию в работах [16, 19, 31]) показывает, что многие из них не известны не только инженерам, но и специалистам, занимающимся экспериментальными исследованиями и моделированием поведения материалов.

Данная работа – очередной шаг в программе качественного анализа линейного ОС вязкоупругости (и обобщающего его нелинейного ОС Работнова) с произвольными функциями ползучести $\Pi(t)$ и релаксации $R(t)$ [16, 19, 25–31]:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau), \text{ или} \quad (1)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0.$$

Определяющее соотношение (1) описывает изотермические одноосные процессы в структурно-стабильных вязкоупругопластичных материалах, характеризующихся напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ в точке тела (входные процессы предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими при $t \geq 0$, а время и напряжение – безразмерными). Функция ползучести (ФП) $\Pi(t)$ предполагается неотрицательной, дифференцируемой, возрастающей, выпуклой вверх на луче $[0; \infty)$ [25, 28], а функция релаксации (ФР) $R(t)$ – положительной, убывающей и выпуклой вниз на интервале

$(0; \infty)$ (ФР может иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в точке $t = 0$).

Целью данной статьи является аналитическое изучение общих свойств семейств КП при ступенчатых нагружениях, порождаемых линейным ОС с произвольной ФП, анализ их асимптотики при $t \rightarrow \infty$ и отклонения от обычной КП при мгновенном нагружении (без ступенчатой предыстории), их зависимости от параметров программы нагружения и характеристик ФП, условий затухания памяти и накопления остаточной деформации при ползучести. Внимание будет сосредоточено на изучении влияния перестановки ступеней нагружения, проверке некоммутативности и доказательстве асимптотической коммутативности ОС с произвольной ФП при перестановке ступеней нагружения.

Некоторые свойства линейного определяющего соотношения вязкоупругости

В статье приняты следующие сокращения и обозначения:

ФР и ФП (КР, КП) – функции (кривые) релаксации и ползучести;

$h(t)$ – функция Хевисайда; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака;

РеМ – регулярные модели (с ФП: $\Pi(0) \neq 0$);

СиМ – сингулярные модели (ФР содержит слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$);

РеМ- n (СиМ- n) – класс эквивалентности всех регулярных (сингулярных) несократимых n -звенных моделей из линейных пружин и демпферов;

$y(0) := y(0+) - \text{предел функции } y(t) \text{ справа в точке } t = 0$;

$\hat{y}(t_*) := y(t_* + 0) - y(t_* - 0)$ – скачок $y(t)$ в точке t_* .

Операторами вида (1) задаются и трехмерные ОС линейной вязкоупругости для изотропной среды; аналогичные зависимости связывают истории (обобщенные) нагрузки и перемещения в испытаниях образцов на растяжение-сжатие, кручение, изгиб, индентирование (а также – векторов поляризованности и намагниченности среды с историями изменения векторов напряженности электрического и магнитного полей и т.п.).

Операторы (1) взаимно обратны, и потому ФП и ФР связаны уравнением

$$\int_0^t \Pi(t-\tau)R(\tau)d\tau = t, \text{ или} \\ \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau)d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0. \quad (2)$$

Зная ФР, можно найти ФП из уравнения (2), и наоборот. Поэтому одномерное определяющее соотношение (1) содержит лишь одну материальную функцию, а трехмерное для изотропной среды – две (сдвиговую и объемную функцию ползучести).

Операторы (1) определены на линеале кусочно-непрерывных и кусочно-гладких функций. Они представимы в виде:

$$y(t) = y_r(t) + y_s(t), \\ y_s(t) = y(0)h(t) + \sum_{i=1}^n \hat{y}(t_i)h(t-t_i),$$

где $y_r(t)$ – регулярная часть (непрерывная функция, $y_r(0) = 0$); $y_s(t)$ – ступенчатая функция скачков (t_i , $i = 1, \dots, n$ – множество точек разрыва $y(t)$, $t_{i+1} > t_i$).

Тогда

$$y'(t) = y'_r(t) + y(0)\delta(t) + \sum \hat{y}(t_i)\delta(t-t_i),$$

и оператор (1) переводит $\sigma(t) = y(t)$ в деформацию

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)\dot{\sigma}_r(\tau)d\tau + \sigma(0)\Pi(t) + \\ + \sum \hat{\sigma}(t_i)\Pi(t-t_i)h(t-t_i), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

В точках t_i отклик $\varepsilon(t)$ имеет скачки $\hat{\varepsilon}(t_i) = \hat{\sigma}(t_i)\Pi(0)$: так как интегральное слагаемое непрерывно всюду (в силу непрерывности ФП и интегрируемости $\dot{\sigma}_r(\tau)$), то $\hat{\varepsilon}(t_i)$ совпадает со скачком слагаемого $\hat{\sigma}(t_i)\Pi(t-t_i)h(t-t_i)$. Множество точек разрыва t_i может быть бесконечным (при циклических нагружениях), но не должно иметь предельных точек (тогда в сумму включается только конечное число слагаемых с $t_i < t$).

В точках t_i разрывна и скорость деформации (даже если $\dot{\sigma}_r(t)$ непрерывна):

$$\dot{\varepsilon}(t) = \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\dot{\sigma}_r(\tau)d\tau + \Pi(0)\dot{\sigma}_r(t) + \sigma(0)\dot{\Pi}(t) + \\ + \sum \hat{\sigma}(t_i)\dot{\Pi}(t-t_i)h(t-t_i) + \sum \hat{\sigma}(t_i)\Pi(t-t_i)\delta(t-t_i),$$

первое слагаемое всегда непрерывно, третье – если только $\dot{\Pi}(t)$ непрерывна в точке t_p , поэтому

$$\hat{\varepsilon}(t_i) = \Pi(0)\hat{\sigma}_r(t_i) + \sigma(0)\dot{\Pi}(t_i) + \sum_{j < i} \hat{\sigma}(t_j)\dot{\Pi}(t_i - t_j) + \hat{\sigma}(t_i)\dot{\Pi}(0).$$

Если $\dot{\Pi}(t)$ непрерывна при $t \geq 0$, то

$$\hat{\varepsilon}(t_i) = \Pi(0)\hat{\sigma}_r(t_i) + \dot{\Pi}(0)\hat{\sigma}(t_i).$$

Если $\hat{\sigma}_r(t_i) = 0$ (например, при ступенчатом нагружении), то все же $\hat{\varepsilon}(t_i) = \dot{\Pi}(0)\hat{\sigma}(t_i) \neq 0$.

Итак, если модель *регулярна* (т.е. $\Pi(0) \neq 0$) и $\dot{\Pi}(t)$ и $\dot{R}(t)$ непрерывны при $t \geq 0$, то скачки в любой момент времени $t = t_*$ связаны формулами:

$$\hat{\varepsilon}(t_*) = \hat{\sigma}(t_*)\Pi(0), \quad \hat{\varepsilon}(t_*) = \Pi(0)\hat{\sigma}(t_*) + \dot{\Pi}(0)\hat{\sigma}(t_*),$$

и $\hat{\sigma}(t_*) = R(0)\hat{\varepsilon}(t_*)$, $\hat{\sigma}(t_*) = R(0)\hat{\varepsilon}(t_*) + \dot{R}(0)\hat{\varepsilon}(t_*)$.

Если же модель *сингулярна* (если в ФР присутствует слагаемое $\eta\delta(t)$), то $\Pi(0) = 0$ и $\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$ [16]. Как следствие, $\hat{\varepsilon}(t_*) = 0$, $\hat{\varepsilon}(t_*) = \hat{\sigma}(t_*)/\eta$, а скачки $\dot{\varepsilon}(t)$ даже при непрерывной деформации $\varepsilon(t)$ (когда $\hat{\varepsilon}(t_*) = 0$) вызывают разрывы напряжения:

$$\hat{\sigma}(t_*) = R(0)\hat{\varepsilon}(t_*) + \eta\hat{\varepsilon}(t_*),$$

$$\hat{\sigma}(t_*) = \dot{R}(0)\hat{\varepsilon}(t_*) + R(0)\hat{\varepsilon}(t_*) + \eta\hat{\varepsilon}(t_*).$$

Необходимо отметить, что скачок процесса-отклика в любой точке t_* линейно (и локально) зависит от величины скачка программы нагружения (и ее производных) в этой же точке и не зависит от t_* , от предыстории нагружения (если $\dot{\Pi}(t)$ и $\dot{R}(t)$ непрерывны) и от функций ползучести и релаксации (зависит только от их начальных значений). В частности, модуль скачка отклика не меняется при изменении знака скачка нагрузки. Эти свойства можно использовать как индикаторы (не)применимости линейного ОС (например, в испытаниях сплавов алюминия зафиксировано [12], что модуль скачка деформации в момент сброса нагрузки меньше, чем скачок вверх в момент ее приложения).

Если $\Pi(0) \neq 0$, то на множестве *непрерывных* (и кусочно-гладких) процессов $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$ при $t \geq 0$ формулы (3) упрощаются, и определяющее соотношение (1) имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (4)$$

$$\sigma(t) = R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \quad t \geq 0.$$

Если $\Pi(0) \neq 0$, то мгновенный модуль $E = R(0) = 1/\Pi(0)$ конечен, $\dot{\Pi}(0)/\Pi(0) = -\dot{R}(0)/R(0)$ [16], соотношения (4) и второе уравнение (2) – уравнения Вольтерры *второго* рода с ограниченными (если $\dot{R}(0+) < \infty$) ядрами, и потому они однозначно разрешимы в пространствах $L_1[0, b]$, $b > 0$. Случай $\Pi(0) = 0$ приводит к уравнению Вольтерры *первого* рода, некорректным задачам, нерегулярным моделям с особенностью в нуле у функции и кривых релаксации, и касательного модуля, вертикальности мгновенной диаграммы деформирования и т.п. [16, 25–29].

В работах [16, 25–31] детально изучены общие качественные свойства семейств всех основных теоретических кривых интегрального ОС (1) с произвольными ФР и ФП: кривых деформирования при постоянных скоростях нагружения и деформации, релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения и др. Анализ показал, что среди моделей, описываемых ОС (1) с различными ФР и ФП, *необходимо выделять (как минимум) три основных класса*, поскольку качественные свойства базовых теоретических кривых моделей этих трех классов (а также особенности постановки и решения краевых задач) заметно отличаются друг от друга:

1) регулярные модели (РеМ), у которых $\Pi(0) \neq 0$;

2) сингулярные (СиМ) – с ФР, содержащей слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$ (ФР $R = \eta\delta(t)$ задает ньютоновскую жидкость с ОС $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ и входит слагаемым в ФР «половины» моделей из пружин и демпферов), тогда $\Pi(0) = 0$ и $\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$;

3) нерегулярные модели с неограниченной ФР, не содержащей слагаемого $\eta\delta(t)$, но имеющей интегрируемую особенность в точке $t = 0$ ($R(0+) = +\infty$).

Третий класс занимает промежуточное положение между первыми двумя. К нему относится, например, ФР $R(t) = At^{-u}$, $u \in (0; 1)$, $A > 0$, задающая так называемый «фрактальный» эле-

мент «фрактальных» моделей (*fractional models* – модели с оператором дробного дифференцирования; используемый в русскоязычных статьях термин «фрактальные», перегруженный иными смыслами, представляется неудачным и, видимо, нуждается в замене, хотя бы на «дробные модели» или «ДД-модели»); соответствующая ФП имеет вид $\Pi(t) = A^{-1}C(u)t^u$ и обладает не только свойством $\Pi(0) = 0$, как и СиМ, но и свойством $\dot{\Pi}(0) = \infty$, переходным к $\Pi(0) \neq 0$, характеризующему РеМ.

Эти три класса не исчерпывают все модели вида (1), хотя исчерпывают все модели, используемые в практических приложениях, монографиях и учебной литературе. Например, параллельное соединение моделей из второго и третьего класса даст модель с ФР, в которой есть слагаемое с сингулярностью и слагаемое с интегрируемой особенностью.

Структурные реологические модели

Определяющим соотношением (1) задаются и все модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством последовательных и параллельных соединений (они будут использованы для иллюстрации общих свойств кривых ползучести ОС). Схемы всех двух-, трех- и четырехзвенных моделей (в русско- и англоязычной терминологии нет единства) приведены на рис. 1.

Любая реологическая модель описывается уравнением вида

$$P[d]\sigma = Q[d]\varepsilon$$

с двумя дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами, где порядки операторов (их характеристических многочленов) $p = \deg P$, $p \geq 0$, и $q = \deg Q$ либо равны, либо $q = p + 1$ [20, 21, 24], а характеристические корни вещественны, различны и неотрицательны. Из теории линейных дифференциальных уравнений следует, что функция ползучести любой реологической модели – сумма экспонент с отрицательными показателями и коэффициентами и, возможно, функции $\alpha t + \beta$, $\alpha, \beta \geq 0$, а функция релаксации – сумма экспонент с отрицательными показателями и положительными коэффициентами и, возможно, постоянной $\beta \geq 0$ и сингулярности $\eta \delta(t)$, $\eta \geq 0$.

Можно доказать, что множество всех несократимых n -звенных моделей распадается

ровно на два класса эквивалентности: регулярные (при $q = p$) и сингулярные (с $q = p + 1$) модели (будем обозначать их РеМ- n и СиМ- n). Структурно различные модели мы называем эквивалентными, если они задаются одинаковыми семействами функций ползучести (или релаксации). В частности:

1) эквивалентны трехзвенные РеМ Пойнтинга – Томсона и Кельвина (см. рис. 1, а);

2) все четыре РеМ-4 (см. рис. 1, в) эквивалентны модели стандартного тела (последовательному соединению моделей Максвелла и Фойгта, т.е. соединению РеМ-2 и СиМ-2);

3) все РеМ- $2k$, $k > 1$, эквивалентны параллельному соединению k моделей Максвелла с разными временами релаксации;

4) все СиМ- $2k$ эквивалентны последовательному соединению k моделей Фойгта с разными временами ползучести (*retardation time*);

5) РеМ- $(2k+1)$ получается из СиМ- $2k$ последовательным присоединением упругого элемента (с ФР $R(t) = E$ и ФП $\Pi = 1/E$), а СиМ- $(2k+1)$ – из РеМ- $2k$ параллельным подключением вязкого элемента (с ФР $R = \eta \delta(t)$ и ФП $\Pi = t/\eta$).

Например, семейство функций ползучести

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad (5)$$

$$\alpha, \beta \geq 0, \gamma \in [0, \beta], \lambda > 0,$$

порождает все РеМ-4 при $\gamma \in (0; \beta)$, $\alpha, \beta > 0$, а при $\alpha = 0$ – РеМ-3 [25].

Поскольку $\Pi(0) = \beta - \gamma$, ФП (5) порождает СиМ, когда $\gamma = \beta$: при $\lambda \beta = 0$ – ньютоновскую жидкость («вязкий элемент»); при $\alpha = 0$ – модель Фойгта; при $\alpha > 0$ получаются (все) СиМ-3 (см. рис. 1, б). При $\gamma = 0$ ФП (5) дает модель Максвелла. Случай $\gamma < 0$ приводит к нарушению ограничения $\dot{\Pi}(t) \leq 0$, а это влечет возрастание кривой обратной ползучести [25] (что противоречит данным испытаний материалов). Функция ползучести моделей СиМ-4 (см. рис. 1, г) не входит в семейство (5), т.к. имеет спектр из двух времён ретардации [26].

Кривые обратной ползучести

и ограничение на функцию ползучести

«Ступеньку» $\sigma(t) = \bar{\sigma}[h(t) - h(t - T)]$, где $\bar{\sigma} > 0$, $T > 0$, оператор (1) переводит в процесс $\varepsilon(t) = \bar{\sigma} S(t; T)$, $S(t; T) := \Pi(t)h(t) - \Pi(t - T) \times h(t - T)$, $t \geq 0$. В точке $t = T$ $\varepsilon(t)$ и $\dot{\varepsilon}(t)$ име-

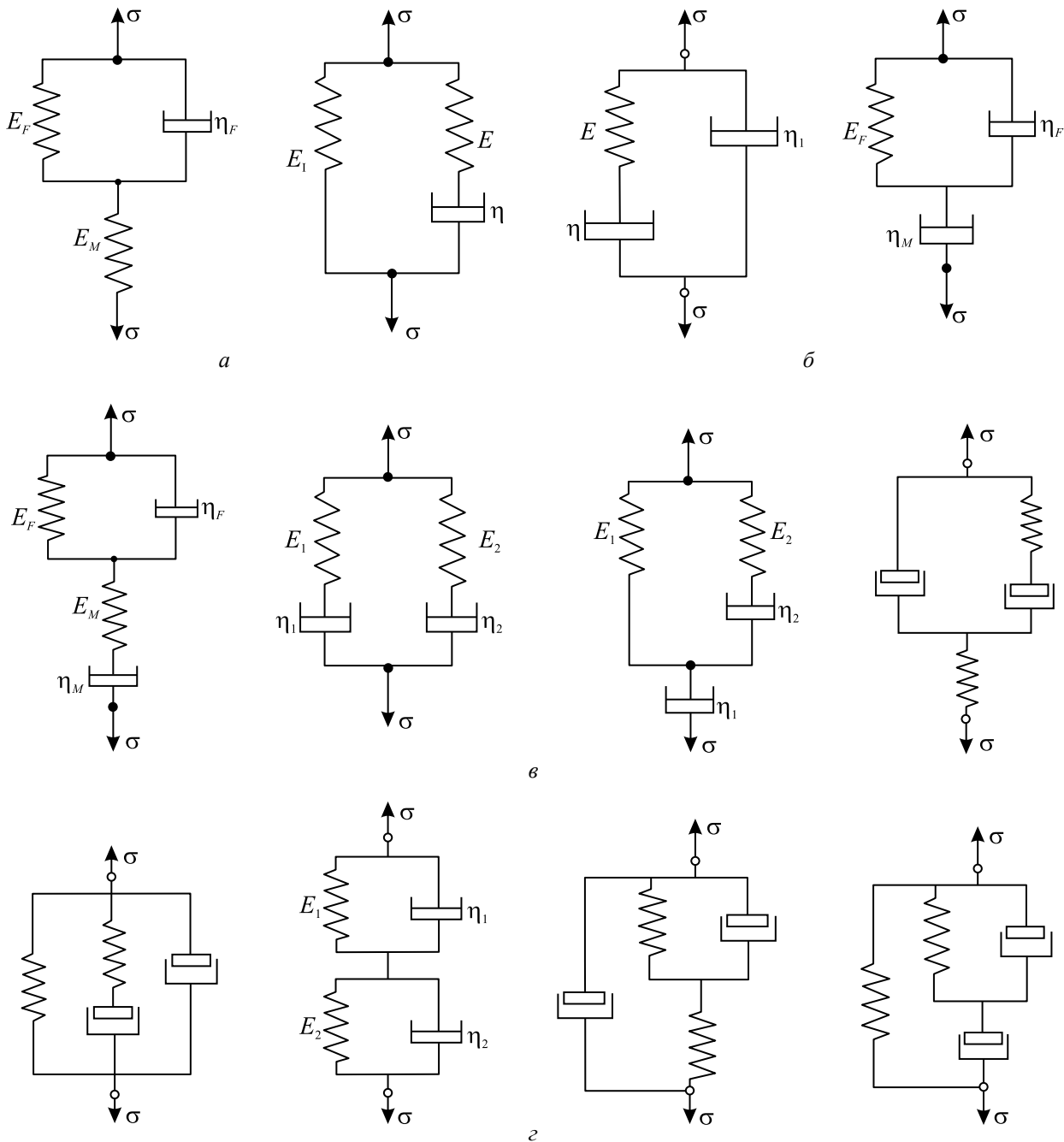


Рис. 1. Схемы реологических моделей из линейных пружин и демпферов:
а – регулярные трехзвенные модели (РеМ-3); б – сингулярные трехзвенные модели (СиМ-3);
в – регулярные четырехзвенные модели (РеМ-4); з – сингулярные четырехзвенные модели (СиМ-4)

ют место скачки $\hat{\varepsilon}(T) = -\bar{\sigma}\Pi(0)$, $\hat{\dot{\varepsilon}}(T) = -\bar{\sigma}\dot{\Pi}(0)$, а при $t > T$ уравнение кривых обратной ползучести (КОП) имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \bar{\sigma}S(t; T), \quad (6)$$

$$S(t; T) = \Pi(t) - \Pi(t - T), \quad t > T.$$

Кривые обратной ползучести (6) для моделей с ФП (5) принимают вид:

$$\varepsilon(t) = \bar{\sigma}(\alpha T + ce^{-\lambda t}), \quad c := \gamma(e^{\lambda T} - 1).$$

У моделей РеМ-4 и СиМ-3 $\varepsilon(t) \rightarrow \bar{\sigma}\alpha T$ при $t \rightarrow \infty$. У модели Максвелла $\gamma = 0$ и $\varepsilon(t) = \bar{\sigma}\alpha T \equiv \text{const}$ при $t > T$, т.е. вся накопленная за время T деформация необратима. У моделей Фойгта и РеМ-3 $\alpha = 0$, и потому $\varepsilon(t) = \bar{\sigma}\gamma(e^{\lambda T} - 1)e^{-\lambda t}$ и $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

У всех структурно-стабильных материалов после снятия нагрузки наблюдается постепенное убывание (релаксация) деформации до некоторого уровня (нулевого для сетчатых по-

лимеров в высокоэластичном состоянии). Это явление называется упругим восстановлением (*recovery*), возвратом, последствием, обратной ползучестью [3–5]. Задача его адекватного описания налагает на функцию ползучести дополнительное ограничение. Из требования (не строгого) убывания КОП (6) (с любым T) следует невозрастание $\dot{\Pi}(t)$ [25]. Поэтому на ФП в ОС (1) следует наложить ограничение: $\Pi(t)$ не имеет участков выпуклости вниз. Можно доказать, что ограничение $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ не является следствием остальных ограничений на ФР и ФП (и тождества (2)): существует гладкая убывающая ФР с $\ddot{R}(t) \geq 0$, такая, что соответствующая ФП строго монотонна, но имеет участок с $\ddot{\Pi}(t) > 0$ (хотя $\ddot{R}(t) > 0$ на нем) [26].

Итак, $\dot{\Pi}(t) > 0$ и убывает на луче $t > 0$ и, значит, имеет предел $v := \dot{\Pi}(\infty) \geq 0$. Для моделей (5) $v = \alpha$, т. е. $v > 0$ при $\alpha > 0$ (для РеМ-2, СиМ-3 и РеМ-4). Если ФП ограничена, то $v = 0$ и $\varepsilon(t) \rightarrow 0$. Нетрудно доказать, что ФП всех моделей СиМ-2*k* и РеМ-(2*k*+1) ограничены, а у РеМ-2*k* и СиМ-(2*k*+1), $k \in \mathbb{N}$, всегда $v > 0$. Может быть $v = 0$ и для неограниченной ФП, например, для $\Pi(t) = \alpha t^u + \beta$, $u \in (0; 1)$, $\alpha, \beta > 0$ («фрактальная модель Максвелла»).

Поскольку КОП (6) убывает и положительна (ограничена снизу), она имеет предел $\varepsilon_\infty \geq 0$ при $t \rightarrow \infty$, и $\varepsilon(\infty) = \bar{\sigma} S(\infty, T)$. По теореме Лагранжа $S(\infty, T) = vT$. Если $v > 0$, память модели (точнее, память оператора Π) не затухает, ибо след, оставленный прямоугольным импульсом нагрузки (остаточная деформация $\varepsilon_\infty = \bar{\sigma} v T$), не стирается никогда [16, 25]. Для идентификации параметра v по экспериментальной КОП, можно использовать формулу $v = \varepsilon_\infty / (\bar{\sigma} T)$, если удастся зарегистрировать ε_∞ . Отметим, что определить предельную остаточную деформацию ε_∞ непросто, поскольку скорость обратной ползучести обычно велика в окрестности точки $t = T$, а затем быстро уменьшается до близких к нулю значений. Восстановление идет очень долго, и трудно определить, закончилось ли оно. Для определения ε_∞ используют нагрев, резко ускоряющий восстановление [3, 17].

Общие свойства кривых ползучести при ступенчатом нагружении

В силу линейности и инвариантности оператора (1) относительно сдвигов, он переводит

кусочно-постоянную программу нагружения с n ступеньками

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i [h(t - t_{i-1}) - h(t - t_i)] + \sigma_n h(t - t_{n-1})$$

(полагаем, что $t_0 = 0$ и $t_i > t_{i-1}$) в сумму

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i S(t - t_{i-1}; t_i - t_{i-1}) + \sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) h(t - t_{n-1}), \quad t > 0, \quad (7)$$

где $S(t; T) := \Pi(t)h(t) - \Pi(t - T)h(t - T)$ – отклик на единичную ступеньку напряжения с носителем $[0, T]$.

КП (7) представима в виде суммы влияний скачков напряжения:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\sigma}_i \Pi(t - t_i) h(t - t_i), \quad t > 0,$$

или

$$\varepsilon(t) = \sigma_1 \Pi(t) + \sum_{k=1}^i \hat{\sigma}_k \Pi(t - t_k), \quad t \in (t_i; t_{i+1}), \quad (8)$$

где $\hat{\sigma}_i := \sigma_{i+1} - \sigma_i$ – скачки напряжения в точке t_i .

Скачки отклика $\varepsilon(t)$ и производной $\dot{\varepsilon}(t)$ в точке t_i связаны с $\hat{\sigma}_i$ формулами:

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{\sigma}_i \Pi(0), \quad \dot{\hat{\varepsilon}}_i = \Pi(0) \hat{\sigma}_i + \dot{\Pi}(0) \hat{\sigma}_i = \dot{\Pi}(0) \hat{\sigma}_i$$

(так как в данном случае $\hat{\sigma}_i = 0$).

Поскольку для произвольной допустимой ФП (дифференцируемой, возрастающей, выпуклой вверх при $t > 0$) $S(t; T) \rightarrow v$ при $t \rightarrow \infty$, где $v := \dot{\Pi}(\infty)$, то из выражения (7) следует, что

$$\varepsilon(t) = \sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + s_+ + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (9)$$

$$s_+ := v \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i (t_i - t_{i-1}). \quad (10)$$

Если $\sigma_n = 0$ (полная разгрузка при $t > t_{n-1}$), то $\varepsilon(t) \rightarrow s_+$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. КП (7) имеет горизонтальную асимптоту, а s_+ приобретает смысл остаточной деформации (после снятия нагрузки и завершения восстановления при $t \rightarrow \infty$).

Если $\sigma_n \neq 0$, но $v = 0$, то $s_+ = 0$, и потому при $t \rightarrow \infty$ имеем:

$$\varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) \rightarrow 0, \quad \varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t) \rightarrow 0,$$

$$\Pi(t) - \Pi(t - t_{n-1}) \rightarrow 0.$$

В частности, $v = 0$, если ФП $\Pi(t)$ ограничена (как у всех моделей СиМ-2*k* и РеМ-(2*k*+1)); в этом случае $s_+ = 0$ и $\varepsilon(t) \rightarrow \sigma_n \Pi_\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Если ФП не ограничена и $\sigma_n \neq 0$, то

$\varepsilon(t) \sim \sigma_n \Pi(t - t_{n-1})$ при $t \rightarrow \infty$ и $|\varepsilon(t)|$ неограниченно возрастает.

Если $\nu \neq 0$ (как у РеМ-2k и СиМ-(2k+1), $k \in \mathbf{N}$) и $\sigma_n \neq 0$, то $\varepsilon(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, $\sigma_n(\Pi(t) - \Pi(t - t_{n-1})) \rightarrow \sigma_n \nu t_{n-1} \neq 0$, $\varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) \rightarrow s_+$ (s_+ может быть любым, но, если все $\sigma_i \geq 0$ и хотя бы одно $\sigma_k > 0$, то и $s_+ > 0$), а $\varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t)$, вообще говоря, не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если у ФП есть наклонная асимптота, т.е. существует $\lim(\Pi(t) - \nu t) = b$ при $t \rightarrow \infty$, то КП (7) имеет асимптоту $\varepsilon = \sigma_n[\nu(t - t_{n-1}) + b] + s_+$ (например, РеМ-4 с ФП (5) и $\nu = \alpha$). Отметим, что, если все $\sigma_i \geq 0$ для $i < n$, то отклонение $\varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t - t_{n-1})$ убывает на луче $t > t_{n-1}$, так как все слагаемые в соотношении (7), кроме последнего, убывают по t при $t > t_i$.

Из выражения (9) следует еще одно важное свойство кривых ползучести (7) ОС (1) с произвольным количеством ступеней нагружения $n > 2$ для произвольной допустимой функции ползучести (возрастающей, выпуклой вверх):

Утверждение 1. Если у двух программ ступенчатого нагружения с $n > 2$ одинаковы конечные уровни напряжения σ_n и моменты их включения t_{n-1} , то:

1) разность откликов (КП (7)) $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$ не зависит от σ_n ;

2) $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $s_{+1} = s_{+2}$ (см. (10)).

Некоммутативность при перестановке ступеней нагружения

Одквистом было подмечено [1], что для теории ползучести с упрочнением вида $\dot{\varepsilon} = g(\varepsilon)f(\sigma)$ справедливо свойство коммутативности при двухступенчатом нагружении [3]: для двух программ нагружения, отличающихся лишь порядком (мгновенного) приложения напряжений σ_1 и σ_2 в течение одинакового времени T , деформация в момент $t = 2T$ будет одна и та же: $\varepsilon_{12}(2T) = \varepsilon_{21}(2T)$. В испытаниях материалов это свойство не выполняется, а наблюдается $\varepsilon_{12}(2T) > \varepsilon_{21}(2T)$ для $\sigma_2 > \sigma_1$ [2, 3, 5]. Докажем, что линейное ОС (1) с любой ФП качественно верно описывает этот эффект и всегда дает $\varepsilon_{12}(2T) > \varepsilon_{21}(2T)$.

Для входных процессов

$$\sigma(t) = \sigma_1 h(t) + (\sigma_2 - \sigma_1)h(t - T) \text{ и}$$

$$\sigma(t) = \sigma_2 h(t) + (\sigma_1 - \sigma_2)h(t - T) \text{ отклики}$$

(кривые ползучести) при $t > T$ определяются по формуле (8) с $n = 2$, $t_1 = T$:

$$\varepsilon_{12}(t) = \sigma_1 \Pi(t) + (\sigma_2 - \sigma_1)\Pi(t - T),$$

$$\varepsilon_{21}(t) = \sigma_2 \Pi(t) + (\sigma_1 - \sigma_2)\Pi(t - T),$$

$$\varepsilon_{12}(t) - \varepsilon_{21}(t) = (\sigma_1 - \sigma_2)\Pi(t) + 2(\sigma_2 - \sigma_1) \times \\ \times \Pi(t - T) = (\sigma_2 - \sigma_1)[2\Pi(t - T) - \Pi(t)], \quad t > T.$$

В частности:

$$\varepsilon_{12}(2T) - \varepsilon_{21}(2T) = (\sigma_2 - \sigma_1)[2\Pi(T) - \Pi(2T)].$$

Поскольку $2\Pi(T) - \Pi(2T) - \Pi(0) \geq 0$ в силу выпуклости вверх ФП, для любых двух программ нагружения с $\sigma_2 > \sigma_1$ ОС (1) всегда дает $\varepsilon_{12}(2T) > \varepsilon_{21}(2T)$. Равенство $\varepsilon_{12}(2T) - \varepsilon_{21}(2T) = 0$ возможно лишь в случае одновременного выполнения двух условий: $\Pi(0) = 0$ и $\Pi(t)$ линейна на $[0; 2T]$, т.е. возможно только для вязкого элемента (с ФП $\Pi = \alpha t$). Для модели Максвелла $2\Pi(T) - \Pi(2T) = \beta = 1/E$ и $\varepsilon_{12}(2T) - \varepsilon_{21}(2T) = (\sigma_2 - \sigma_1)\beta$.

Асимптотическая коммутативность при перестановке ступеней нагружения

Исследуем связь между откликами $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3)$ и $\varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ на две трехступенчатые программы нагружения с произвольным напряжением σ_3 при $t > t_2 = 2T$. Из выражения (7) с $n = 3$, $t_1 = T$ и $t_2 = 2T$ следует, что при $t > t_2 = 2T$ разность откликов не зависит от σ_3 :

$$\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) - \varepsilon_{21}(t, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)S(t; T) + (\sigma_2 - \sigma_1) \times \\ \times S(t - T; T) = (\sigma_2 - \sigma_1)[S(t - T; T) - S(t; T)],$$

т.е.

$$\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) - \varepsilon_{21}(t, \sigma_3) = (\sigma_2 - \sigma_1)\Delta(t, T), \quad t > 2T, \quad (11)$$

$$\Delta(t, T) := -\Pi(t) + 2\Pi(t - T) - \Pi(t - 2T), \quad t > 2T. \quad (12)$$

Лемма 1. Для произвольной дифференцируемой выпуклой вверх функции ползучести $\Delta(t, T) \geq 0$ при $t \geq 2T$ и $\Delta(t, T) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если $\ddot{\Pi}(t)$ убывает, то $\Delta(t, T)$ убывает по t .

Доказательство.

1) $2f(t-T) \geq f(t) + f(t-2T)$ для любой выпуклой вверх функции на отрезке $[t-2T, t]$. Равенство $\Delta(t, T) = 0$ имеет место лишь для вязкого элемента и модели Максвелла, для которых $\ddot{\Pi}(t) \equiv 0$ и $\Delta(t, T) \equiv 0$, $t > T$.

2) По теореме Лагранжа

$$\Delta(t, T) := -\dot{\Pi}(t - \xi_1)T + \dot{\Pi}(t - \xi_2)T =$$

$$= (\dot{\Pi}(t - \xi_2) - \dot{\Pi}(t - \xi_1))T,$$

где $\xi_1 \in (0; T)$, $\xi_2 \in (T; 2T)$; так как существует предел $\dot{\Pi}(\infty) = v$ (в силу убывания и ограниченности снизу $\dot{\Pi}(t)$), то $\Delta(t, T) \rightarrow v - v = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

3) Если $\dot{\Pi}(t)$ выпукла вверх, то $\dot{\Delta}(t, T) < 0$ □.

Из соотношения (11) и леммы 1 следует, что (для любого σ_3)

$$\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) - \varepsilon_{21}(t, \sigma_3) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Это свойство вытекает также из утверждения 1: ведь для программ, полученных любой перестановкой ступеней нагружения (с номером меньше n), в частности, двух программ, рассматриваемых в этом пункте статьи, выполняется равенство $s_{+12} = v(\sigma_1 + \sigma_2)T = s_{+21}$ (остаточная деформация одинакова). Итак, доказано

Утверждение 2. Для любого σ_3 (и любых σ_1, σ_2, T) и произвольной допустимой функции ползучести (дифференцируемой, возрастающей, выпуклой вверх при $t > 0$) разность кривых ползучести $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) - \varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$; если $\sigma_2 > \sigma_1$, то $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) > \varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ на луче $t \geq 2T$.

Свойство КП, сформулированное в утверждении 2, назовем *асимптотической коммутативностью ОС (I)* при перестановке ступеней нагружения.

Утверждение 3. Пусть $\sigma_3 = \bar{\sigma} := (\sigma_1 + \sigma_2) / 2$, $\sigma_2 > \sigma_1$. Тогда КП $\varepsilon_{12}(t, \bar{\sigma})$ и $\varepsilon_{21}(t, \bar{\sigma})$ (для произвольной допустимой функции ползучести) обладают свойствами:

1) $\varepsilon_{12}(t, \bar{\sigma}) > \varepsilon(t, \bar{\sigma}) > \varepsilon_{21}(t, \bar{\sigma})$ при всех $t > 2T$, где $\varepsilon(t, \bar{\sigma}) = \bar{\sigma}\Pi(t)$ – обычная КП (при мгновенном нагружении в момент $t = 0$);

2) при $t \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_{12}(t, \bar{\sigma}) - \varepsilon(t, \bar{\sigma}) \rightarrow 0 \text{ и } \varepsilon_{21}(t, \bar{\sigma}) - \varepsilon(t, \bar{\sigma}) \rightarrow 0$$

(а не только $\varepsilon_{12}(t, \bar{\sigma}) - \varepsilon_{21}(t, \bar{\sigma}) \rightarrow 0$).

Доказательство. Учитывая, что скачки напряжения в точках $t_1 = T$ и $t_2 = 2T$ для двух

программ нагружения различаются лишь знаком, по формуле (8) получим:

$$\varepsilon_{12}(t, \bar{\sigma}) = \sigma_1 \Pi(t) + (\sigma_2 - \sigma_1) \Pi(t - T) -$$

$$- 0,5(\sigma_2 - \sigma_1) \Pi(t - 2T) \text{ при } t > 2T,$$

$$\varepsilon_{21}(t, \bar{\sigma}) = \sigma_2 \Pi(t) - (\sigma_2 - \sigma_1) \Pi(t - T) +$$

$$+ 0,5(\sigma_2 - \sigma_1) \Pi(t - 2T).$$

Отсюда

$$\varepsilon_{12}(t) - \bar{\sigma} \Pi(t) = 0,5(\sigma_2 - \sigma_1) \Delta(t, T) =$$

$$= \bar{\sigma} \Pi(t) - \varepsilon_{21}(t). \quad (13)$$

Поскольку $\Delta(t, T) \geq 0$ для любого $t \geq 2T$, то $\varepsilon_{12}(t) \geq \varepsilon(t, \bar{\sigma}) \geq \varepsilon_{21}(t)$. Равенство имеет место только для вязкого элемента и модели Максвелла: для них $\Delta(t, T) \equiv 0$ при $t > T$. Поскольку $\Delta(t, T) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то из выражения (13) следует, что для любой ФП и любого v $\varepsilon_{12}(t, \bar{\sigma}) - \varepsilon(t, \bar{\sigma}) \rightarrow 0$ и $\varepsilon_{21}(t, \bar{\sigma}) - \varepsilon(t, \bar{\sigma}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, где $\bar{\sigma} = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2$ □.

Подчеркнем, что для всех $\sigma_3 \neq \bar{\sigma}$ в случае $v \neq 0$ сходимости $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) - \varepsilon(t, \sigma_3) \rightarrow 0$ и $\varepsilon_{21}(t, \sigma_3) - \varepsilon(t, \sigma_3) \rightarrow 0$ не будет в силу (9), так как $s_+ = v(\sigma_1 + \sigma_2)T > 0$. Точнее, из соотношения (9) с $n = 3$, $t_1 = T$ и $t_2 = 2T$ следует, что

$$\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) - \varepsilon(t, \sigma_3) = \sigma_1 S(t; T) + \sigma_2 S(t - T; T) +$$

$$+ \sigma_3 [\Pi(t - 2T) - \Pi(t)],$$

и потому при $t \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) - \varepsilon(t, \sigma_3) \rightarrow \sigma_1 vT + \sigma_2 vT - \sigma_3 2vT =$$

$$= vT(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3).$$

Итак,

$$\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) - \varepsilon(t, \sigma_3) \rightarrow vTs \text{ и}$$

$$\varepsilon_{21}(t, \sigma_3) - \varepsilon(t, \sigma_3) \rightarrow vTs, \quad (14)$$

$$s := \sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3,$$

т.е. отклонение от обычной КП $\varepsilon(t, \sigma_3)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ лишь в двух случаях: $v = 0$ или $\sigma_3 = \bar{\sigma}$.

Из выражения (14) также следует, что в случае $v \neq 0$, КП $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3)$ и $\varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ лежат по разные стороны от обычной КП $\varepsilon(t, \sigma_3)$ лишь при $\sigma_3 = \bar{\sigma}$: если $\sigma_3 > \bar{\sigma}$, то $s < 0$, и обе КП $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3)$ и $\varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ лежат ниже КП $\varepsilon(t, \sigma_3)$ при больших t , а если $\sigma_3 < \bar{\sigma}$, то $s > 0$, и обе КП лежат выше $\varepsilon(t, \sigma_3)$.

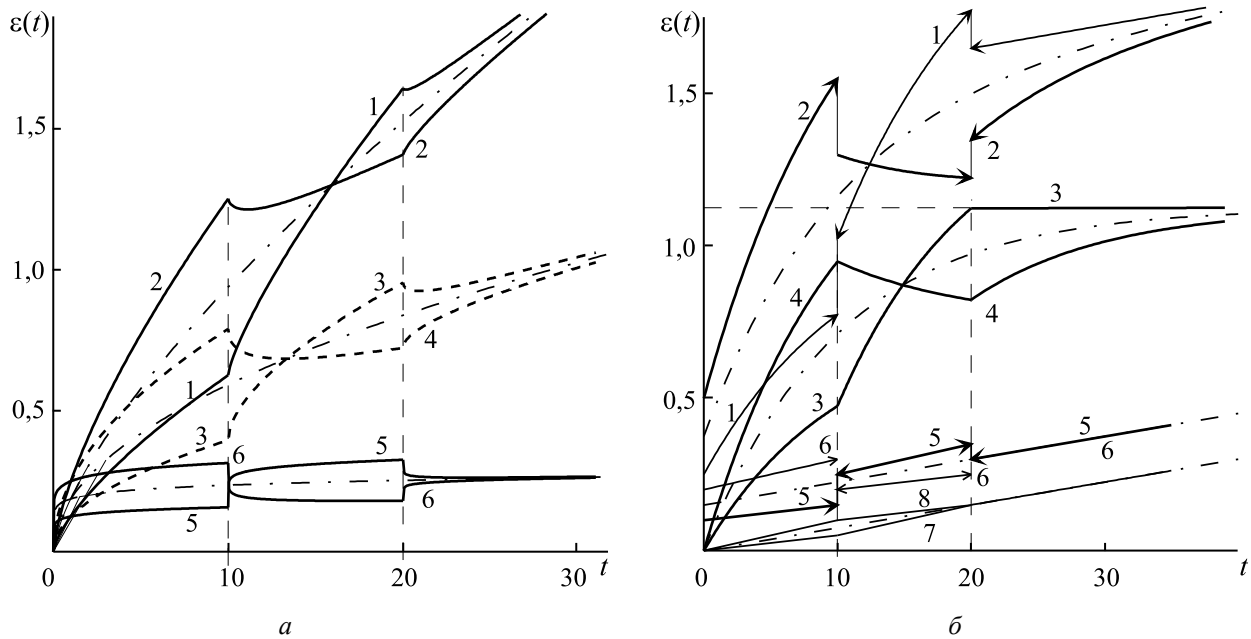


Рис. 2. Кривые ползучести $\varepsilon_{12}(t, \bar{\sigma})$ и $\varepsilon_{21}(t, \bar{\sigma})$ с $T=10$, $\sigma_1=0,5$, $\sigma_2=1$ и $\sigma_3=\bar{\sigma}=0,5(\sigma_1+\sigma_2)$:
a – для трех моделей со степенной ФП $\Pi = at^u$ с $a=0,25$: 1, 2 – $u=0,7$; 3, 4 – $u=0,5$; 5, 6 – $u=0,1$;
б – для четырех моделей (5) (со временем ретардации $\tau = 1/\lambda = 10$):
 1, 2 – РеМ-4 с $\alpha=0,01$, $\beta=2$, $\gamma=1,5$, $\lambda=0,1$; 3, 4 – модель Фойгта с $\beta=\gamma=1,5$, $\lambda=0,1$, $\alpha=0$;
 5, 6 – модель Максвелла с $\alpha=0,01$, $\beta=0,2$; 7, 8 – вязкий элемент с $\alpha=0,01$, $\beta=0$

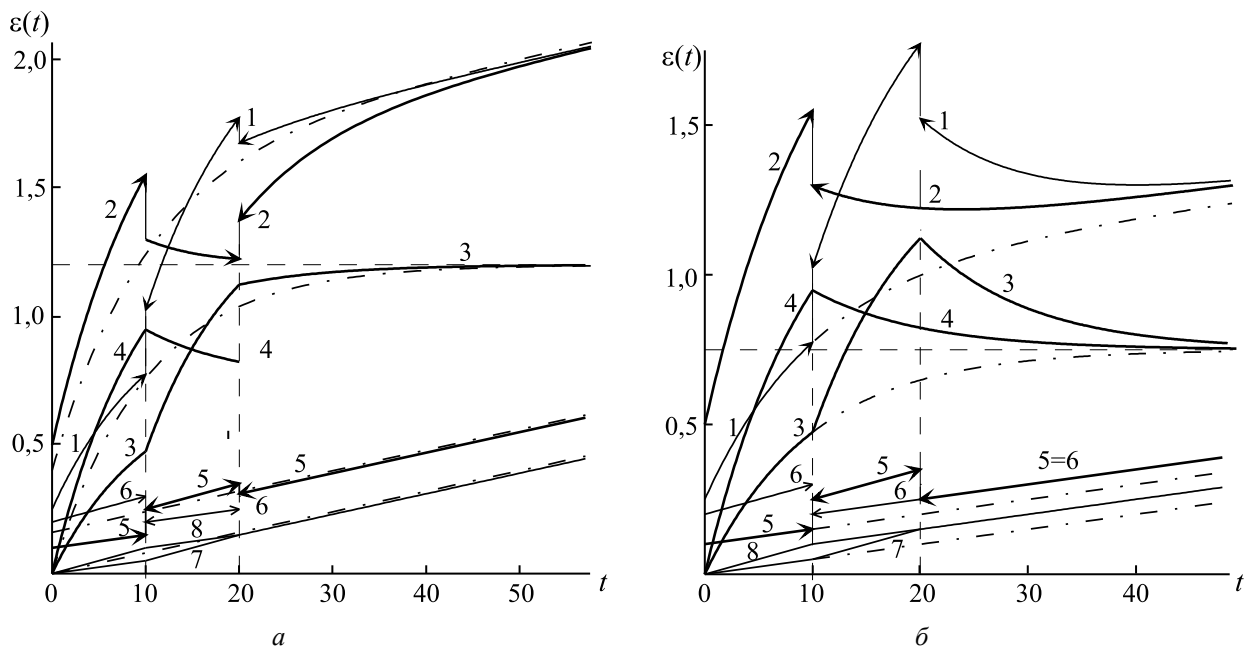


Рис. 3. Кривые ползучести $\varepsilon_{12}(t, \bar{\sigma})$ и $\varepsilon_{21}(t, \bar{\sigma})$ при $T=10$, $\sigma_1=0,5$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3 \neq \bar{\sigma} = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$
для моделей РеМ-4, СиМ-2, РеМ-2, СиМ-1:
a – $\sigma_3=0,8 > \bar{\sigma}=0,75$; **б** – $\sigma_3=\sigma_1=0,5 < \bar{\sigma}$; — · — · — $\varepsilon(t, \bar{\sigma})$;
 — (горизонтальная) – общая асимптота трех КП модели Фойгта

На рис. 2 приведены кривые ползучести $\varepsilon_{12}(t, \bar{\sigma})$ и $\varepsilon_{21}(t, \bar{\sigma})$ с $T=10$, $\sigma_1=0,5$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=\bar{\sigma}$, где $\bar{\sigma}=0,5(\sigma_1+\sigma_2)$ для семи различных моделей: на рис. 2, а – для трех моделей со степенной ФП $\Pi = at^u$ с $a=0,25$ и разными показателями: $u=0,7$ (кривые 1, 2), $u=0,5$ (КП 3, 4), $u=0,1$ (КП 5, 6); на рис. 2, б – для четырех моделей с ФП (5): 1) РеМ-4 с $\alpha=0,01$, $\beta=2$, $\gamma=1,5$, $\lambda=0,1$ (кривые 1, 2); 2) модели Фойгта с $\beta=\gamma=1,5$, $\lambda=0,1$, $\alpha=0$ (КП 3, 4 с горизонтальной асимптотой); 3) модели Максвелла с $\alpha=0,01$, $\beta=0,2$ (КП 5, 6; они совпадают при $t \geq 2T$); 4) вязкого элемента с $\alpha=0,01$, $\beta=0$ (КП 7, 8; они совпадают при $t \geq 2T$). Штрих-пунктирные линии – обычные КП $\varepsilon(t, \bar{\sigma})$ (при мгновенном нагружении в момент $t=0$). В этом случае (при $\sigma_3=\bar{\sigma}$) справедливо утверждение 3: КП $\varepsilon_{12}(t, \bar{\sigma})$ и $\varepsilon_{21}(t, \bar{\sigma})$ лежат с разных сторон от обычной КП $\varepsilon(t, \bar{\sigma})$ на всем луче $t \geq 2T$, а их отклонения от нее стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Поскольку у степенных ФП $\Pi(0)=0$, то все КП на рис. 2, а не имеют разрывов в точках $t=T$ и $t=2T$; а так как $\dot{\Pi}(0)=+\infty$, то у всех КП на рис. 2, а предел производной справа и ее скачки в точках $t=T$ и $t=2T$ равны $\pm\infty$ (знак совпадает со знаком скачка напряжения: $\dot{\varepsilon}_{12}(T+0, \bar{\sigma})=+\infty$, $\dot{\varepsilon}_{21}(T+0, \bar{\sigma})=-\infty$, $\dot{\varepsilon}_{12}(2T+0, \bar{\sigma})=-\infty$, $\dot{\varepsilon}_{21}(2T+0, \bar{\sigma})=+\infty$). По оси абсцисс отложено безразмерное время, так как рассматриваемые качественные свойства кривых ползучести не зависят от его масштабирования (зависят только от отношения t/T).

На рис. 3 приведены КП $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3)$ и $\varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ для тех же моделей, что и на рис. 2, б при тех же значениях $T=10$, $\sigma_1=0,5$, $\sigma_2=1$, но с $\sigma_3 \neq \bar{\sigma}=(\sigma_1+\sigma_2)/2$, а именно: на рис. 3, а – с $\sigma_3=0,8 > \bar{\sigma}=0,75$, а на рис. 3, б – с $\sigma_3=\sigma_1 < \bar{\sigma}$. КП $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3)$ и $\varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ отличаются от КП $\varepsilon_{12}(t, \bar{\sigma})$ и $\varepsilon_{21}(t, \bar{\sigma})$, приведенных на рис. 2, б только при $t > 2T=20$. Штрих-пунктирные линии – обычные КП $\varepsilon(t, \sigma_3)$ (с $\sigma_3=0,8$ на рис. 3, а и с $\sigma_3=0,5$ на рис. 3, б); горизонтальная штриховая прямая – общая асимптота трех КП модели Фойгта. В силу утверждения 2 $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) - \varepsilon_{21}(t, \sigma_3) \rightarrow 0$. Для моделей с $\nu \neq 0$ (РеМ-4, модель Максвелла и вязкий элемент – КП 1, 2, 5-8) сходимости отклонений $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) - \varepsilon(t, \sigma_3)$ и $\varepsilon_{21}(t, \sigma_3) - \varepsilon(t, \sigma_3)$ к нулю нет (нет затухания памяти о начальной стадии нагружения).

В случае $\sigma_3=0,8 > \bar{\sigma}=0,75$ (см. рис. 3, а) КП $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3)$ и $\varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ модели РеМ-4 (КП 1, 2) в правой окрестности точки $t=2T$ лежат по разные стороны от обычной КП $\varepsilon(t, \sigma_3)$ (так как $|\sigma_3 - \bar{\sigma}|=0,05$ достаточно мало по сравнению с $\bar{\sigma}$), а при достаточно больших t обе КП $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3)$ и $\varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ (как было доказано) лежат ниже $\varepsilon(t, \sigma_3)$ (в отличие от случая $\sigma_3=\bar{\sigma}$ на рис. 2, б). С ростом σ_3 точка пересечения $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3)$ и $\varepsilon(t, \sigma_3)$ смещается влево и исчезает в точке $t=2T$ (при $\sigma_3=\bar{\sigma}_3 \approx 0,86$); при $\sigma_3 > \bar{\sigma}_3$ обе КП $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3)$ и $\varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ лежат ниже обычной КП $\varepsilon(t, \sigma_3)$ на всем луче $t \geq 2T$. В случае $\sigma_3=\sigma_1 < \sigma_2$ (см. рис. 3, б) обе КП $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3)$ и $\varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ всех моделей лежат выше обычной КП $\varepsilon(t, \sigma_3)$ на всем луче $t \geq 2T$ (разность $|\sigma_3 - \bar{\sigma}|$ достаточно велика).

Отметим также наличие точек минимума на КП степенной модели в интервалах $(T, 2T)$ и $(2T, \infty)$ (см. рис. 2, а) и на КП РеМ-4 в интервале $t > 2T$ (см. рис. 3, б – КП 1 и 2) и отсутствие минимума у КП модели Фойгта (КП 3 и 4).

В работе [16] найдены условия существования интервала убывания и точки минимума у двухступенчатых кривых ползучести ОС (1) ($n=2$ в (7)) с неполной разгрузкой (когда $\sigma(t)=\sigma_2 \in (0; \sigma_1)$ при $t > t_1$). Этот эффект наблюдается в экспериментах при достаточно малом отношении σ_2/σ_1 [3, 5, 6, 9, 12, 13] и нередко интерпретируется как проявление нелинейности поведения материала. Анализ показал [16], что линейное ОС (1) (при минимальных ограничениях на функцию ползучести) воспроизводит этот эффект при малом σ_2/σ_1 (РеМ-4 и др.), некоторые линейные модели – при любом $\sigma_2 \in (0; \sigma_1)$ (степенные функции ползучести), а некоторые не способны воспроизводить этот эффект ни при каком $\sigma_2 \in (0; \sigma_1)$ (например, РеМ-3, СиМ-2, РеМ-2). Если $\Pi(\infty)=\infty$ и $\sigma_2 > 0$, то интервал убывания КП (7) (с $n=2$) обязательно конечен, так как главная часть ее асимптотики (9) неограниченно возрастает.

Закключение

В статье аналитически исследованы общие качественные свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях, порождаемых определяющими соотношениями (1) с произвольной функцией ползучести, их зависимость от характеристик функции ползучести и про-

грамм нагружения. Изучены скачки деформации и скорости деформации в точках разрыва напряжения, асимптотика кривых ползучести, отклонения от обычной кривой ползучести при мгновенном нагружении (без предыстории), условия затухания памяти, влияние перестановки ступеней нагружения на кривые ползучести. Выявлена ключевая роль величины предела производной функции ползучести на бесконечности в классификации поведения линейных моделей, порождаемых определяющим соотношением (1), при больших временах: доказано, что отличие от нуля материального параметра $\nu := \dot{\Gamma}(\infty)$ влечет накопление остаточной деформации (10) и отсутствие затухания памяти (в частности, $\nu > 0$ у каждой второй реологической модели из пружин и демпферов: у всех РеМ-2k и СиМ-(2k-1), $k \in \mathbb{N}$). Дано определение свойства асимптотической коммутативности ОС (1) при перестановке ступеней нагружения, доказано наличие этого свойства у ОС (1) с произвольной выпуклой вверх функцией ползучести (с любым значением ν) и инвариантность остаточной деформации (10) относительно перестановок ступеней нагружения. Показано, что для проверки наличия свойства затухания памяти у материала не достаточно сравнения экспериментальных кривых ползучести, отвечающих перестановкам ступеней нагружения.

В работе [19] изучены общие свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях, порожденных ОС нелинейной теории наследственности Ю.Н. Работнова с двумя материальными функциями, обобщающим ОС (1), в частности, установлены условия (ограничения на материальные функции) его асимптотической коммутативности при перестановке ступеней нагружения и затухания памяти.

Список литературы

1. Одквист Ф. Технические теории ползучести // Сб. переводов «Механика». 1959. № 2. С. 101–111.
2. Наместников В.С., Работнов Ю.Н. О гипотезе уравнения состояния при ползучести // ПМТФ. 1961. Т. 2. № 2. С. 101–102.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. – 752 с.
4. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. – 287 с.
5. Малинин Н.Н. Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. – 221 с.
6. Betten J. Creep Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 367 p.
7. Lakes R.S. Viscoelastic Materials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 462 p.
8. Cho U.W., Findley W.N. Creep and plastic strains of 304 stainless steel at 593 °C under step stress changes, considering aging // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1982. Vol. 49. No. 2. P. 297–304.
9. Hamouda B.H., Laiarinandrasana L., Piques R. Viscoplastic behavior of a medium density polyethylene (MDPE): constitutive equations based on double nonlinear deformation model // Int. J. Plasticity. 2007. Vol. 23. No. 8. P. 1307–1327.
10. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // Известия РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 147–166.
11. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // Известия РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 140–160.
12. Dandrea J., Lakes R.S. Creep and creep recovery of cast aluminum alloys // Mechanics of Time-Dependent Materials. 2009. Vol. 13. P. 303–315.
13. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers // Int. J. Plasticity. 2011. Vol. 27. P. 512–521.
14. Drozdov A.D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers // Mechanics of Materials. 2014. Vol. 69. P. 116–131.
15. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep? // International Journal of Plasticity. 2011. Vol. 27. No. 12. P. 1936–1958.
16. Хохлов А.В. Общие свойства семейств кривых ползучести при ступенчатом нагружении линейного определяющего соотношения вязкоупругости, условия моделирования эффекта Кольрауша и затухания памяти // Отчет о НИР № 5254. НИИ механики МГУ. 2014. Гос. рег. № 01 20 1152141. – 83 с.

17. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров. 1971. № 1. С. 74–87.
18. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. – 384 с.
19. Хохлов А.В. Общие свойства кривых ползучести и длительной прочности, порождаемых нелинейной теорией наследственности Ю.Н. Работнова // Отчет о научно-исследовательской работе № 5288. НИИ механики МГУ. 2015. Гос. рег. № 01 20 1152141. – 74 с.
20. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. – 280 с.
21. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. – 338 с.
22. Tschoegl N.W. The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. Berlin: Springer, 1989. – 769 p.
23. Knauss W.G., Emri I., Lu H. Mechanics of Polymers: Viscoelasticity // Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics, ed. by W.N. Sharpe. N.Y.: Springer, 2008. P. 49–96.
24. Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победра Б.Е. Особенности поведения вязкоупругих моделей // Известия РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 119–157.
25. Хохлов А.В. Кривые обратной ползучести в рамках линейной вязкоупругости и необходимые ограничения на функцию ползучести // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Вып. 75. № 4. С. 257–267.
26. Хохлов А.В. Свойства произведения функции ползучести и функции релаксации в линейной вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Вып. 76. № 4. С. 343–356.
27. Хохлов А.В. Свойства кривых релаксации с начальной стадией деформирования и затухание памяти в линейной теории вязкоупругости // Материалы междунаро. науч. конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 443–445.
28. Хохлов А.В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Вып. 77. № 1. С. 60–74.
29. Хохлов А.В. Характерные особенности семейств кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Вып. 77. № 2. С. 139–154.
30. Хохлов А.В. Качественный анализ определяющих соотношений как базовая стадия их аттестации // Материалы междунаро. науч. конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 435–438.
31. Хохлов А.В. Свойства кривых релаксации с начальной стадией деформирования с постоянной скоростью, порождаемых линейным интегральным соотношением вязкоупругости, и методики его идентификации // Отчет о НИР № 5305. НИИ механики МГУ им. Ломоносова, 2016. – 62 с.

Материал поступил в редакцию 15.12.2015

ХОХЛОВ Андрей Владимирович

E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru
Тел.: (495) 932-89-24

Кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории упругости и пластичности Института механики МГУ имени М.В. Ломоносова. Сфера научных интересов: механика деформируемого твердого тела, математическое моделирование, качественный анализ, идентификация и аттестация определяющих соотношений термовязкоупругопластичности и ползучести. Автор 70 научных работ.