УДК 531.383

ВЛИЯНИЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ЧАСТОТЫ УГЛОВОЙ ВИБРАЦИИ ОСНОВАНИЯ НА ДИНАМИКУ МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА КАМЕРТОННОГО ТИПА

А.С. Степанов, Е.С. Сбытова, В.В. Подалков

Разработана математическая модель малых колебаний микромеханического гироскопа камертонного типа с резонатором в виде четырех упругих нерастяжимых стержней при плавном изменении частоты угловой вибрации основания. Для моделирования динамики чувствительного элемента получены линейные интегро-дифференциальные уравнения движения с использованием вариационного принципа Гамильтона – Остроградского. С помощью процедуры Бубнова – Галеркина построены дифференциальные уравнения для обобщенных координат системы. Методом осреднения получена система линейных дифференциальных уравнений с учетом такого медленно изменяющегося параметра, как частота вибрации, и приведено точное решение для медленных переменных. Исследовано влияние медленно меняющейся частоты угловой вибрации на амплитуды колебаний. Показано, что плавное изменение во времени частоты угловой вибрации основания приводит к искажению амплитуд колебаний резонатора.

Ключевые слова: *микромеханический гироскоп, вибрирующее основание, медленно меняющийся параметр.*

EFFECT OF A SLOWLY VARYING FREQUENCY OF THE PEDESTAL ANGULAR VIBRATION ON DYNAMICS OF THE MICROMECHANICAL TUNING FORK GYROSCOPE

A.S. Stepanov, E.S. Sbytova, V.V. Podalkov

A small oscillation mathematical model for a micromechanical tuning fork gyroscope with a resonator in the form of four elastic and inextensible rods at smooth varying frequency of the pedestal angular vibration is designed. The linear integral-differential equations of motion are obtained with the Hamilton – Ostrogradsky variational principle for simulating the sensor dynamics. The differential equations for generalized system coordinates have being constructed with the use of Bubnov – Galerkin method. The system of linear differential equations with a slowly varying parameter as a frequency of vibration is obtained by the averaging method, and an exact solution for slow variables has given. The effect of slowly varying frequency of angular vibration on the oscillation amplitude is investigated. It is shown that the smooth varying in time frequency of pedestal angular vibration leads to the oscillation amplitude distortion of the resonator.

Keywords: *micromechanical gyroscope, vibrating pedestal, slowly varying parameter.*

Введение

Создание высокоточных микромеханических гироскопов (ММГ) открывает новые возможности по высокоточной навигации и управлению движением объектов: аэрокосмических летательных аппаратов, морских судов, наземных транспортных средств, робототехнических комплексов.

Однако достигнутая в настоящее время точность микромеханических гироскопов не позволяет применять их в средствах автономной навигации, в том числе внутри помещений, в условиях недоступности внешней спутниковой навигационной коррекции. Также, при работе в реальных условиях (вибрации, удары, акустические воздействия, изменения температуры) характеристики ММГ существенно ухудшаются. Повышение точности гироскопических датчиков требует решения широкого ряда проблем как технологического, так и научно-исследовательского плана.

Разработка новой математической модели чувствительных элементов, учитывающей анизотропные и нелинейные упругие свойства конструкционного материала, малые инструментальные погрешности изготовления, медленно изменяющееся угловое движение основания, влияние ударов и вибраций основания, нелинейных эффектов, присущих системе, позволит повысить точность и диапазон измерения угловых движений. Актуальной также является проблема разработки методов аналитической, алгоритмической и силовой компенсации погрешностей, возникающих из-за несовершенства технологии изготовления и изменяющихся условий функционирования.

В статье [1] описана математическая модель микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней, построено решение нелинейных уравнений движения чувствительного элемента ММГ на вибрирующем основании и проведено исследование устойчивости по Ляпунову стационарных решений.

В работе [2] рассматривается микромеханический гироскоп с резонатором в виде упругих пластин. В линейной постановке задачи исследована динамика гироскопа в режиме свободных колебаний в случае медленного изменения собственной частоты и угловой скорости вращения основания.

Влияние переменных и постоянных поступательных и угловых вибраций изучено в работе [3]. На основе численного эксперимента установлено, что наибольшее влияние оказывают поступательные вибрации по оси вторичных колебаний и угловые вибрации по оси измеряемой угловой скорости. Комбинация вибраций приводит к искажению выходного сигнала, изменению его амплитуды и появлению постоянных смещений во вторичных колебаниях. Постоянные угловые ускорения приводят к уменьшению с течением времени амплитуд первичных и вторичных колебаний.

Целью данной работы является получение решения дифференциальных уравнений для медленных переменных при плавном изменении частоты вибрации основания, построение зависимостей амплитуд колебаний от времени и исследование влияния медленно меняющейся частоты угловой вибрации основания на динамику микромеханического гироскопа.

Постановка задачи

В настоящей работе объектом исследования является микромеханический гироскоп, чувствительный элемент которого – четыре упругих нерастяжимых стержня 1, закрепленные в рамке 2, соединенной упругим торсионом 3 с основанием 4 (рис. 1).

С подвижной рамкой 2 связана система координат $\xi\eta\zeta$ (см. рис. 1). При этом основание вращается вокруг оси ξ с угловой скоростью Ω, в общем случае являющейся некоторой функцией времени *t*. Ось ξ называется осью чувствительности гироскопа.

В данной работе рассматриваются колебания чувствительного элемента в плоскости, перпендикулярной оси ξ. При этом смещениями малого элемента стержня вдоль осей ξ и η пренебрегаем. В качестве внешнего возмущения рассматривается угловая вибрация основания (подразумевается вращение вокруг оси ξ).

Под действием электростатической системы управления резонатор совершает периодическое движение, измерение которого позволя-

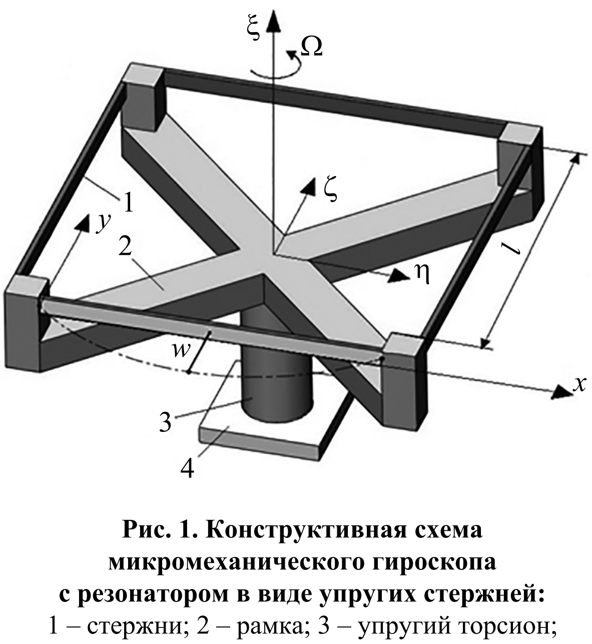

Рис. 1. Конструктивная схема микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней:
1 – стержни; 2 – рамка; 3 – упругий торсион; 4 – основание

ет определить вращение основания гироскопа в инерциальном пространстве.

Для описания колебаний стержня введена функция прогиба поверхности упругого стержня $w = w(x,\ t)$, зависящая от времени t и координаты x, связанной со стержнем, и угол α – малый угол поворота рамки относительно основания гироскопа.

Далее в работе будет показано, что предложенная новая математическая модель, учитывающая медленно изменяющееся угловое движение, позволяет повысить оценку точности работы гироскопа. При этом предложенные алгоритмы исследования могут быть применены для других гироскопов класса обобщенный маятник Фуко [4].

Уравнения движения

С использованием вариационного принципа Гамильтона – Остроградского [5], получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие динамику гироскопа [1]:

$$J(\dot{\Omega}+\ddot{\alpha})+c\alpha+\kappa_*\dot{\alpha}+4\rho F\left[2(\Omega+\dot{\alpha})\int_0^l\left(\frac{l}{2}+w\right)\dot{w}dx+\right.$$
$$\left.+(\dot{\Omega}+\ddot{\alpha})\int_0^l\left(lw+w^2\right)dx+\int_0^l\left(x-\frac{l}{2}\right)\ddot{w}dx\right]=0;$$
$$\ddot{w}+\frac{EJ_{\text{ст}}}{\rho F}w^{IV}+\frac{E_*J_{\text{ст}}}{\rho F}\dot{w}^{IV}+(\dot{\Omega}+\ddot{\alpha})\left(x-\frac{l}{2}\right)- \quad (1)$$
$$-\left(\Omega+\dot{\alpha}\right)^2\left(x-\frac{l}{2}\right)=0,$$

где $J=\dfrac{4}{3}\rho Fl^3+J_0$ – обобщенный момент инерции системы (J_0 – момент инерции рамки относительно главной оси ξ); ρ – плотность материала стержня; l – длина стержня; $F = bh$ – площадь прямоугольного поперечного сечения стержня (b и h – геометрические размеры поперечного сечения); $J_{\text{ст}}$ – момент инерции поперечного сечения стержня; E – модуль Юнга; E_* – вязкоупругий модуль материала стержня, характеризующий внутреннее трение в материале; c – жесткость торсиона на кручение; κ_* – коэффициент вязкого трения торсиона.

В выражении (1) учтено внутреннее трение по модели Кельвина – Фойгта [6]. Полагая, что резонатор находится в вакуумированной полости, внешними потерями при колебаниях будем пренебрегать.

Принимается, что стержень жестко заделан на концах. Функция нормального прогиба w задается в виде [5]:

$$w=\frac{2\beta(t)}{lW\left(\frac{l}{2}\right)}W(x); \quad (2)$$

$$W(x)=\left(\operatorname{sh}r_1-\sin r_1\right)\left(\operatorname{ch}\left(r_1\frac{x}{l}\right)-\cos\left(r_1\frac{x}{l}\right)\right)-$$
$$-\left(\operatorname{ch}r_1-\cos r_1\right)\left(\operatorname{sh}\left(r_1\frac{x}{l}\right)-\sin\left(r_1\frac{x}{l}\right)\right).$$

Здесь $\beta(t)$ – искомая функция формы колебаний, характеризующей прогиб в середине стержня ($\beta(t)\ \le\ 1$); r_1 = 4,73 – первый корень трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}r_1\cos r_1=1$ [5].

После применения процедуры Бубнова – Галеркина получены дифференциальные уравнения для обобщенных координат α и β в виде:

$$\begin{aligned}&\ddot{\alpha}+\omega_1^2\alpha=-d_1\dot{\alpha}-2\Omega k_1\dot{\beta}-2k_1\dot{\alpha}\dot{\beta};\\&\ddot{\beta}+\omega_2^2\beta=-d_2\dot{\beta}+2\Omega k_2\dot{\alpha},\end{aligned} \quad (3)$$

где ω_1^2, ω_2^2 – квадраты собственных частот колебаний резонатора на неподвижном основании; d_1, d_2 – коэффициенты демпфирования; k_1, k_2 – коэффициенты при гироскопических слагаемых в математической модели движения.

Эти параметры системы определяются следующими выражениями и значениями:

$$\begin{aligned}&\omega_1^2=\frac{c}{J},\omega_2^2=\frac{EJ_{\text{ст}}}{\rho F}\frac{r_1^4}{l^4},d_1=\frac{\kappa_*}{J};\\&d_2=\frac{E_*J_{\text{ст}}}{\rho F}\frac{r_1^4}{l^4},k_1=0{,}523\frac{\rho Fl^3}{J},k_2=1{,}319.\end{aligned} \quad (4)$$

Согласно (4) квадраты собственных частот колебаний ω_1^2, ω_2^2 в общем случае могут различаться, но для оптимального функционирования гироскопа параметры системы подбираются таким образом, чтобы частоты собственных колебаний были равны. Поэтому примем $\omega_1=\omega_2=\omega$.

Вибрация основания

Рассматривается микромеханический гироскоп с резонатором в виде упругих стержней, помещенный на вибрирующее основание при медленно меняющейся частоте угловой вибрации. Смоделируем вибрацию основания представлением угловой скорости в виде

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \sin 2\mu, \qquad (5)$$

где Ω_0 – заданная постоянная составляющая угловой скорости основания; Ω_1 и 2μ – амплитуда и настраиваемая фаза угловой вибрации основания, соответственно.

Частота угловой вибрации основания $\omega_0(\tau)$ является функцией медленного времени $\tau = \varepsilon t$, где ε – малый положительный параметр, причем $\dot{\mu} = \omega_0(\tau)$.

Вводя безразмерное время $t_* = \omega t$ и коэффициенты демпфирования $d_1 = d_2 = 2\gamma_0\omega$, $\gamma_0 \le 1$, получим уравнения для обобщенных координат α и β в виде:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\alpha} + \alpha = -2\gamma_0\dot{\alpha} - 2k_1\left(\nu_0 + \nu_1 \sin 2\mu\right)\dot{\beta} - \\
&-4k_1\nu_1\hat{\omega}(\tau)\cos 2\mu\beta - 2\nu_1\hat{\omega}(\tau)\cos 2\mu; \\
&\ddot{\beta} + \beta = -2\gamma_0\dot{\beta} + 2k_2\left(\nu_0 + \nu_1 \sin 2\mu\right)\dot{\alpha}.
\end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь $\nu_0 = \dfrac{\Omega_0}{\omega} \le 1$ – безразмерная постоянная составляющая угловой скорости основания; $\nu_1 = \dfrac{\Omega_1}{\omega} \le 1$ – нормализованная амплитуда угловой скорости вибрации основания; $\hat{\omega}(\tau) = \dfrac{\omega_0(\tau)}{\omega}$ – безразмерная частота вибрации основания.

В режиме мягкого резонансного воздействия частота внешнего воздействия должна быть близка к собственной частоте колебаний гироскопа, то есть

$$\hat{\omega}(\tau) - 1 = \Delta\omega(\tau). \qquad (7)$$

где $\left|\Delta\omega(\tau)\right| \le 1$.

Решение для системы (6) в случае медленно меняющейся частоты угловой вибрации основания имеет вид [7]:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_0(t,\tau) + \alpha_1(t,\tau); \\
\beta &= \beta_0(t,\tau) + \beta_1(t,\tau).
\end{aligned} \qquad (8)$$

Причем $\left|\alpha_1\right| \le \left|\alpha_0\right|$, $\left|\beta_1\right| \le \left|\beta_0\right|$ и

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= p_1(\tau)\sin\mu + q_1(\tau)\cos\mu; \\
\beta_0 &= p_2(\tau)\sin\mu + q_2(\tau)\cos\mu,
\end{aligned}$$

где p_1, q_1, p_2, q_2 – медленные переменные.

С использованием метода осреднения [8] получена система дифференциальных уравнений для определения p_1, q_1, p_2, q_2:

$$\begin{aligned}
&\frac{dp_1}{d\tau} + \gamma_0 p_1 + k_1\left(\nu_0 p_2 + \frac{1}{2}\nu_1 q_2\right) - \Delta\omega(\tau) q_1 = 0; \\
&\frac{dq_1}{d\tau} + \gamma_0 q_1 + k_1\left(\nu_0 q_2 + \frac{1}{2}\nu_1 p_2\right) + \Delta\omega(\tau) p_1 = 0; \\
&\frac{dp_2}{d\tau} + \gamma_0 p_2 - k_2\left(\nu_0 p_1 - \frac{1}{2}\nu_1 q_1\right) - \Delta\omega(\tau) q_2 = 0; \\
&\frac{dq_2}{d\tau} + \gamma_0 q_2 - k_2\left(\nu_0 q_1 - \frac{1}{2}\nu_1 p_1\right) + \Delta\omega(\tau) p_2 = 0.
\end{aligned} \qquad (9)$$

Решение системы (9) ищем в виде

$$\begin{aligned}
&p_1 = Ae^{\lambda(\tau)},\ q_1 = Be^{\lambda(\tau)}; \\
&p_2 = Ce^{\lambda(\tau)},\ q_2 = De^{\lambda(\tau)}.
\end{aligned} \qquad (10)$$

Подставив (10) в (9), получим систему уравнений для констант A, B, C, D, представимую в матричном виде:

$$\mathbf{A_I X} = 0, \qquad (11)$$

$$\mathbf{A_I} = \begin{bmatrix}
\dfrac{d\lambda}{d\tau} + \gamma_0 & -\Delta\omega(\tau) & k_1\nu_0 & \dfrac{1}{2}k_1\nu_1 \\
\Delta\omega(\tau) & \dfrac{d\lambda}{d\tau} + \gamma_0 & \dfrac{1}{2}k_1\nu_1 & k_1\nu_0 \\
-k_2\nu_0 & \dfrac{1}{2}k_2\nu_1 & \dfrac{d\lambda}{d\tau} + \gamma_0 & -\Delta\omega(\tau) \\
\dfrac{1}{2}k_2\nu_1 & -k_2\nu_0 & \Delta\omega(\tau) & \dfrac{d\lambda}{d\tau} + \gamma_0
\end{bmatrix}; \qquad (12)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Решение характеристического уравнения $\det(\mathbf{A_I}) = 0$ дает четыре корня:

$$\lambda_i(\tau) = -\gamma_0 t + \int_0^t \theta_i(\tau)\,dt,\ i = 1,\ldots,4; \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}
\theta_{1,2}(\tau) &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{k_1k_2\nu_1^2 - 4\left(\Delta\omega(\tau) + \sqrt{k_1k_2}\,\nu_0\right)^2}; \\
\theta_{3,4}(\tau) &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{k_1k_2\nu_1^2 - 4\left(\Delta\omega(\tau) - \sqrt{k_1k_2}\,\nu_0\right)^2}.
\end{aligned} \qquad (14)$$

Тогда решение дифференциальных уравнений (9) имеет следующий вид:

$$p_1(\tau)=\sum_{i=1}^{4}A_i e^{\lambda_i(\tau)};\quad q_1(\tau)=\sum_{i=1}^{4}B_i e^{\lambda_i(\tau)};$$
$$p_2(\tau)=\sum_{i=1}^{4}C_i e^{\lambda_i(\tau)};\quad q_2(\tau)=\sum_{i=1}^{4}D_i e^{\lambda_i(\tau)}. \tag{15}$$

Если в (14) подкоренное выражение отрицательное, то есть

$$k_1k_2\nu_1^2<4\left(\Delta\omega(\tau)+\sqrt{k_1k_2}\nu_0\right)^2;$$
$$k_1k_2\nu_1^2<4\left(\Delta\omega(\tau)-\sqrt{k_1k_2}\nu_0\right)^2,$$

то

$$\lambda_i(\tau)=-\gamma_0 t+i\int_0^t\tilde{\theta}_i(\tau)\,dt, i=1-4; \tag{16}$$
$$\tilde{\theta}_{1,2}(\tau)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\left(\Delta\omega(\tau)+\sqrt{k_1k_2}\nu_0\right)^2-k_1k_2\nu_1^2};$$
$$\tilde{\theta}_{3,4}(\tau)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\left(\Delta\omega(\tau)-\sqrt{k_1k_2}\nu_0\right)^2-k_1k_2\nu_1^2}.$$

Тогда в решении (15) A_i, B_i, C_i, D_i (см. **X** в (12)) являются комплексными константами. В этом случае необходимо выделить в решении (15) действительную часть. Тогда в выражениях для p_1, q_1, p_2, q_2 будут присутствовать функции времени вида:

$$e^{-\gamma_0 t}\cos\int_0^t\tilde{\theta}_i(\tau)\,dt,\ e^{-\gamma_0 t}\sin\int_0^t\tilde{\theta}_i(\tau)\,dt,$$

умноженные на некоторые константы, определяемые начальными условиями.

Найдем связь между константами A_i, B_i, C_i и D_i (i = 1,...,4). Для этого подставим в первые три уравнения системы (11) значение первого корня. Отсюда найдем связь между A_1 и B_1, C_1, D_1, соответственно. Аналогично находится связь между остальными константами.

Таким образом, получаем решение дифференциальных уравнений (9):

$$p_1(\tau)=\sum_{i=1}^{4}A_i e^{\lambda_i(\tau)};$$
$$q_1(\tau)=\sum_{i=1}^{4}\frac{f_{B_i}}{g_{B_i}}A_i e^{\lambda_i(\tau)};$$
$$p_2(\tau)=\sum_{i=1}^{4}\frac{f_{C_i}}{g_{C_i}}A_i e^{\lambda_i(\tau)}; \tag{17}$$
$$q_2(\tau)=\sum_{i=1}^{4}\frac{f_{D_i}}{g_{D_i}}A_i e^{\lambda_i(\tau)},$$

где константы A_i находятся из начальных условий $p_{j0}=p_j(\tau)$, $q_{j0}=q_j(\tau)$ (j = 1, 2).

С учетом $\theta_i=\theta_i(\tau)$ в выражениях (17) введены следующие обозначения:

$$\frac{f_{B_i}}{g_{B_i}}=\frac{\left(-\theta_i k_1k_2\left[4\nu_0^2+\nu_1^2\right]+4\theta_i\left[\left(\Delta\omega(\tau)\right)^2+\theta_i^2\right]+4k_1k_2\nu_0\nu_1\Delta\omega(\tau)\right)}{\Delta\omega(\tau)\left(4\left[\left(\Delta\omega(\tau)\right)^2+\theta_i^2\right]-k_1k_2\left[4\nu_0^2+\nu_1^2\right]\right)};$$

$$\frac{f_{C_i}}{g_{C_i}}=-\frac{1}{2}\frac{k_2\left(k_1k_2\nu_1\left[4\nu_0^2-\nu_1^2\right]+4\theta_i\left[4\nu_0\Delta\omega(\tau)+\nu_1\theta_i\right]+4\nu_1\left(\Delta\omega(\tau)\right)^2\right)}{\Delta\omega(\tau)\left(4\left[\left(\Delta\omega(\tau)\right)^2+\theta_i^2\right]-k_1k_2\left[4\nu_0^2+\nu_1^2\right]\right)};$$

$$\frac{f_{D_i}}{g_{D_i}}=-\frac{k_2\nu_0\left(k_1k_2\nu_1\left[4\nu_0^2-\nu_1^2\right]+4\left[\left(\Delta\omega(\tau)\right)^2+\theta_i^2\right]\right)}{\Delta\omega(\tau)\left(4\left[\left(\Delta\omega(\tau)\right)^2+\theta_i^2\right]-k_1k_2\left[4\nu_0^2+\nu_1^2\right]\right)}.$$

Числовой пример

Рассматривается микромеханический гироскоп, резонатор которого представляет собой стержни длиной l = 20 мм прямоугольного сечения с размерами b = 0,33 мм и h = 1 мм, изготовленные из плавленого кварца (ρ = 2201 кг/м³, E = 73 ГПа). При обобщенном моменте инерции $J = 3\cdot10^{-8}$ кг·м² с учетом совмещения частот собственных колебаний имеем: c = 254,9 Н·м, k_1 = 0,1013, k_2 = 1,319, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ = 92987 рад/с (14,806 кГц). Коэффициент вязкого трения $\gamma_0 = 0{,}9\varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-5}$.

Пусть частота угловой вибрации основания изменяется по закону

$$\hat{\omega}(\tau) = \Delta\omega(0)(1+\varepsilon t)+1.$$

Примем следующие нормализованные параметры:

$$\nu_0 = 4\varepsilon; \quad \nu_1 = 50\varepsilon; \quad \Delta\omega(0) = 11{,}5\varepsilon.$$

Тогда соответствующие размерные параметры углового движения:

$$\Omega_0 = 3{,}71c^{-1},\ \Omega_1 = 46c^{-1},$$
$$\Delta\tilde{\omega}(0) = 10{,}69c^{-1}\ (1{,}7\,Гц).$$

Амплитуды колебаний резонатора равны

$$A = \sqrt{p_1^2 + q_1^2},\ B = \sqrt{p_2^2 + q_2^2}\,. \qquad (16)$$

На рисунке 2 приведены графики амплитуд колебаний резонатора $A(t)$ и $B(t)$ при медленно меняющейся и при постоянной частоте угловой вибрации основания.

Из приведенных графиков можно сделать вывод, что наличие медленно меняющейся частоты угловой вибрации основания приводит к сдвигу амплитуд колебаний резонатора.

Как показано в работе [7], в гироскопах класса *обобщенный маятник Фуко* в режиме свободных колебаний можно определить угол поворота основания измерением медленных переменных q_1, p_1, q_2, p_2. Таким образом, найденное решение системы дифференциальных уравнений для медленно изменяющихся переменных может быть использовано для более точной оценки углового движения основания микромеханического гироскопа.

Заключение

Для использования в точных инерциальных навигационных системах и командно-измерительных приборах, применяемых в авиации, космических аппаратах, транспортных системах, в последнее время ведутся разработки именно прецизионных микромеханических гироскопов.

Стабильность характеристик датчиков и достаточно точные математические модели, учитывающие различные факторы среды и конструктивные особенности прибора, позволяют применить алгоритмические и аналитические методы компенсации погрешностей измерений.

В работе проведены результаты исследования влияния медленно меняющейся частоты угловой вибрации основания на динамику микромеханического гигроскопа с резонатором в виде четырех упругих стержней. Методом осреднения получена система линейных дифференциальных уравнений с учетом медленного изменяющегося параметра (частоты вибрации) и построено точное решение для медленных пе-

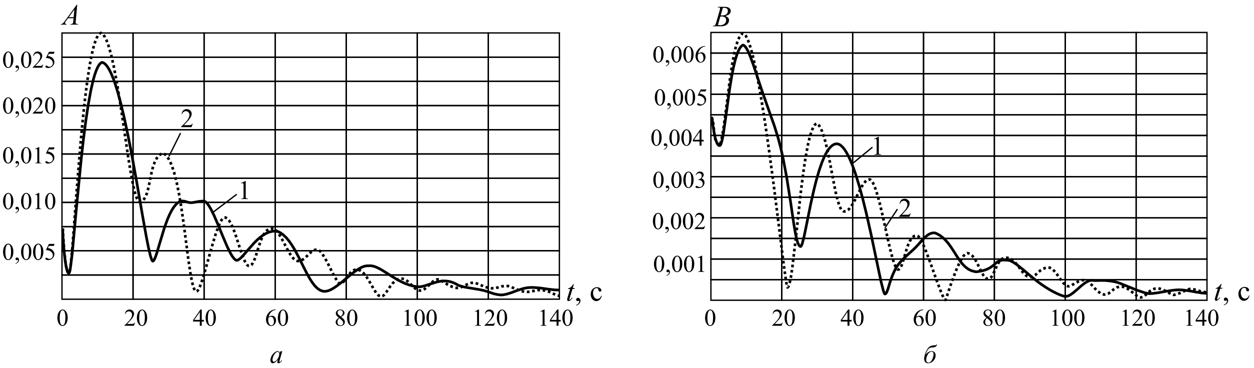

Рис. 2. Графики амплитуд первичных (*а*) и вторичных (*б*) колебаний:
1 – при медленно меняющейся частоте угловой вибрации основания;
2 – при постоянной частоте угловой вибрации основания

ременных. Показано, что плавное изменение во времени частоты угловой вибрации основания приводит к искажению амплитуд колебаний резонатора.

Список литературы

1. *Степанов А.С., Подалков В.В., Сбытова Е.С.* Динамика микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней на вибрирующем основании // Машиностроение и инженерное образование. 2015. № 2. С. 15–21.
2. *Сбытова Е.С.* Динамика микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин: дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2014. – 128 с.
3. *Джашитов Э.В., Панкратов В.М.* Суперминиатюрный микромеханический датчик инерциальной информации в условиях переменных и постоянных механических воздействий // Нано- и микросистемная техника. 2011. № 6 (131). С. 39–43.
4. *Журавлев В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Известия РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
5. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. – 733 с.
6. *Стретт Дж.В. (лорд Релей)* Теория звука. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1955. – 484 с.
7. *Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 228 с.
8. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений: пер. с англ. М.: Мир, 1976. – 456 с.

Материал поступил в редакцию 23.02.2016

СТЕПАНОВ Алексей Сергеевич E-mail: **steepanov@mail.ru** Тел.: **(903) 014-44-00**	Магистрант кафедры теоретической механики и мехатроники Национального исследовательского университета «МЭИ». Сфера научных интересов: мехатроника и робототехника, теоретическая механика, гироскопия, навигация. Автор трех научных статей, двух тезисов докладов.
СБЫТОВА Екатерина Сергеевна E-mail: **sbytovaes@ya.ru** Тел.: **(917) 547-22-57**	Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теоретической механики и мехатроники Национального исследовательского университета «МЭИ». Сфера научных интересов: мехатроника и робототехника, теория колебаний и устойчивость движения, математическое моделирование технических систем, теоретическая механика, гироскопия. Автор пяти научных статей.
ПОДАЛКОВ Валерий Владимирович Тел.: **(903) 581-73-34**	Доктор технических наук, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники Национального исследовательского университета «МЭИ». Сфера научных интересов: теория упругости; теоретическая механика; теория колебаний и устойчивость движения; методы математического моделирования, оценивания и управления механическими и биомеханическими системами; регулярная и хаотическая динамика механических систем; механика машин и роботов; механика технологических процессов; мехатроника и робототехника; теория, методы проектирования и эффективность функционирования технических систем; навигация, наведение и управление подвижными объектами; гироскопия. Автор одной монографии, более 100 научных статей.