УДК 531.383

ВЛИЯНИЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ЧАСТОТЫ ВНЕШНЕГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ДИНАМИКУ МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА

А.С. Степанов, Е.С. Сбытова, В.В. Подалков

Разработана математическая модель, описывающая динамику микромеханического гироскопа камертонного типа с резонатором в виде четырех упругих нерастяжимых стержней при плавном изменении частоты вынуждающей силы. При получении уравнений движения использован вариационный принцип Гамильтона – Остроградского. С помощью процедуры Бубнова – Галеркина построены дифференциальные уравнения для обобщенных координат системы. Получено точное решение дифференциальных уравнений для медленных переменных в режиме вынужденных гармонических колебаний при плавном изменении частоты внешнего воздействия. Построены амплитудно-частотные характеристики. Установлено, что наличие угловой скорости основания приводит к раздвоению кратной собственной частоты на две близкие частоты (два резонансных пика на амплитудно-частотных характеристиках). Показано, что плавное изменение частоты вынуждающей силы приводит к изменению абсолютной величины максимума амплитуд по сравнению со стационарной кривой. Замечено, что резонансные пики существенно смещены относительно пиков стационарной кривой до первого максимума, и после прохождения второго максимума наблюдаются биения амплитуд.

Ключевые слова: *микромеханический гироскоп, вынужденные колебания, медленно меняющийся параметр.*

INFLUENCE OF A SMOOTH CHANGING FREQUENCY OF AN EXTERNAL HARMONIC ACTION ON THE MICROMECHANICAL GYROSCOPE DYNAMICS

A.S. Stepanova, E.S. Sbytova, V.V. Podalkov

A mathematical model describing the dynamics of a micromechanical gyroscope with a resonator in the form of four elastic and inextensible rods with a smooth change of frequency of the driving force is designed. When receiving the equations of motion is used a variational principle of Hamilton – Ostrogradskii. The differential equations for generalized coordinates are constructed with the use of procedures of Bubnov – Galerkin. The exact solution of the differential equations for the slow variables in a mode of forced harmonic oscillations with a gradual change in the frequency of external influence is obtained. The amplitude-frequency characteristics are constructed. It was established that the existence e of the angular velocity of the base leads to splitting the multiple natural frequency of two close frequencies (two resonance peaks in the frequency response). It is showed that a smooth change of the driving force frequency causes a change in the absolute value of the maximum amplitude as compared with a fixed curve. The resonance peaks are substantially offset relative to the peak of the curve to the first fixed peak and after the second maximum amplitude observed beating is noticed.

Keywords: *micromechanical gyroscope, forced oscillations, slowly varying parameter.*

Введение

В настоящее время все большее развитие получает разработка микромеханических приборов, таких как микроакселерометры, включая датчики углового положения, микродвигатели, микромеханические гироскопы. Перспективность этого направления приборостроения во многом обуславливается возможностью создания малогабаритных, обладающих низкой себестоимостью и малой массой приборов, предназначенных для измерения механических величин.

Микромеханические гироскопы (ММГ) применяются в качестве датчиков параметров движения в системах управления, наведения и стабилизации подвижных объектов.

Однако существует ряд проблем как технологического, так и научно-исследовательского плана, которые требуют решения для дальнейшего увеличения точности ММГ.

Основой для проектирования и дальнейшего увеличения точности микромеханических гироскопов являются математические модели движения чувствительных элементов, учитывающие реальные условия функционирования, например вибрации или удары, и инструментальные погрешности изготовления приборов. Аналитические зависимости, учитывающие влияния внешней среды и неточности геометрических размеров, позволяют выработать требования к точности технологических операций и существенно увеличить точность приборов за счет алгоритмической компенсации погрешностей.

Поэтому актуальной является проблема создания новых математических моделей чувствительных элементов, которые позволят повысить точность гироскопических датчиков и систем управления на их основе, а также проблема разработки алгоритмов компенсации погрешностей.

В работе [1] описана математическая модель микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней, построено решение нелинейных уравнений движения чувствительного элемента ММГ на вибрирующем основании и проведено исследование устойчивости стационарных решений по Ляпунову.

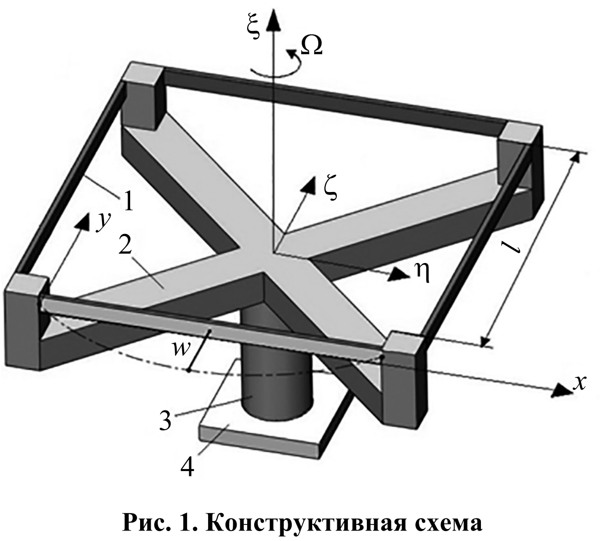

Рис. 1. Конструктивная схема микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней

В работе [2] рассматривается микромеханический гироскоп с резонатором в виде упругих пластин. В линейной постановке задачи исследована динамика гироскопа в режиме вынужденных колебаний в случае медленного изменения собственной частоты и угловой скорости вращения основания.

В статье [3] исследовано влияние медленно меняющейся частоты угловой вибрации основания на динамику ММГ, чувствительный элемент которого – упругие стержни. Показано, что плавное изменение во времени частоты угловой вибрации основания приводит к искажению амплитуд колебаний резонатора.

Целью данной работы является исследование влияния медленно меняющейся частоты внешнего гармонического возбуждения основания на динамику микромеханического гироскопа. Достижение этой цели подразумевает решение дифференциальных уравнений для медленных переменных при плавном изменении частоты вынуждающей силы и анализ амплитудно-частотных характеристик ММГ.

Постановка задачи

В настоящей работе объектом исследования является микромеханический гироскоп с резонатором в виде четырех одинаковых упругих стержней 1 (рис. 1), закрепленных в рамке 2, соединенной упругим торсионом 3 с основанием 4. Длины стержней с прямоугольным поперечным сечением обозначим через l.

С подвижной рамкой 2 связана система координат $\xi\eta\zeta$. При этом основание вращается вокруг оси ξ с угловой скоростью Ω, в общем случае являющейся некоторой функцией времени t. Ось ξ называется осью чувствительности гироскопа.

Рассматриваются колебания чувствительного элемента в плоскости, перпендикулярной оси ξ. При этом смещениями малого элемента стержня вдоль осей ξ и η пренебрегаем. В качестве внешнего возмущения рассматривается угловая вибрация основания (подразумевается вращение вокруг оси ξ).

Под действием электростатической системы управления резонатор совершает периодическое движение, измерение которого позволяет определить вращение основания гироскопа в инерциальном пространстве.

Для описания колебаний стержня введена функция прогиба поверхности упругого стержня $w = w(x,t)$, зависящая от времени t и координаты x, связанной со стержнем, и угол α – малый угол поворота рамки относительно основания гироскопа.

Далее в работе будет показано, что предложенная новая математическая модель, учитывающая внешнее гармоническое воздействие с плавно изменяющейся частотой, позволяет решить проблемы аналитического представления медленно меняющихся условий функционирования и учета их влияния на динамику прибора. При этом предложенные алгоритмы исследования могут быть применены для других гироскопов класса «обобщенный маятник Фуко» [4].

Уравнения движения

Интегро-дифференциальные уравнения, описывающие динамику гироскопа [1], получены с использованием вариационного принципа Гамильтона – Остроградского [5]:

$$
\begin{gathered}
J\left(\dot{\Omega}+\ddot{\alpha}\right)+c\alpha+\kappa_*\dot{\alpha}+4\rho F\left[2\left(\Omega+\dot{\alpha}\right)\int_0^l\left(\frac{l}{2}+w\right)\dot{w}dx+\right.\\
\left.+\left(\dot{\Omega}+\ddot{\alpha}\right)\int_0^l\left(lw+w^2\right)dx+\int_0^l\left(x-\frac{l}{2}\right)\ddot{w}dx\right]=0;\\
\ddot{w}+\frac{EJ_{\text{ст}}}{\rho F}w^{IV}+\frac{E_*J_{\text{ст}}}{\rho F}\dot{w}^{IV}+\left(\dot{\Omega}+\ddot{\alpha}\right)\left(x-\frac{l}{2}\right)-\\
-\left(\Omega+\dot{\alpha}\right)^2\left(x-\frac{l}{2}\right)=0,
\end{gathered}
\qquad (1)
$$

$$J=\frac{4}{3}\rho Fl^3+J_0,$$

где J – обобщенный момент инерции системы; J_0 – момент инерции рамки относительно главной оси ξ; ρ – плотность материала стержня; $F = bh$ – площадь поперечного сечения стержня (b и h – геометрические размеры поперечного сечения стержня); E – модуль Юнга материала стержней; $J_{\text{ст}}$ – момент инерции поперечного сечения стержня; E_* – вязкоупругий модуль материала стержней, характеризующий внутреннее трение в материале; c – жесткость торсиона на кручение; κ_* – коэффициент вязкого трения торсиона.

В уравнениях (1) учтено внутреннее трение по модели Кельвина – Фойгта [6]. Полагая, что резонатор находится в вакуумированной полости, внешними потерями при колебаниях будем пренебрегать.

В анализе принимается стержень с жестко заделанными концами, для которого в решении используются соответствующие граничные условия. Функция нормального прогиба w задается в виде [5]:

$$w=\frac{2\beta(t)}{lW\left(\dfrac{l}{2}\right)}W(x), \qquad (2)$$

$$
\begin{gathered}
W(x)=\left(\text{sh}r_1-\sin r_1\right)\left(\text{ch}\left(r_1\frac{x}{l}\right)-\cos\left(r_1\frac{x}{l}\right)\right)-\\
-\left(\text{ch}r_1-\cos r_1\right)\left(\text{sh}\left(r_1\frac{x}{l}\right)-\sin\left(r_1\frac{x}{l}\right)\right).
\end{gathered}
$$

Здесь $\beta(t)$ – искомая функция формы колебаний, характеризующая прогиб в середине стержня; $\beta(t)\le 1$; $W(x)$ – фундаментальная функция; r_1 = 4,73 – первый корень трансцендентного уравнения $\text{ch}r_1\cos r_1=1$ [5].

После применения процедуры Бубнова – Галеркина, пренебрегая нелинейными слагаемыми в математической модели, получены дифференциальные уравнения для обобщенных координат α и β:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\alpha}+\omega_1^2\alpha=-d_1\dot{\alpha}-2\Omega k_1\dot{\beta};\\
&\ddot{\beta}+\omega_2^2\beta=-d_2\dot{\beta}+2\Omega k_2\dot{\alpha},
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где ω_1^2, ω_2^2 – квадраты собственных частот колебаний резонатора на неподвижном основании; d_1, d_2 – коэффициенты демпфирования; k_1, k_2 – коэффициенты при гироскопических слагаемых в математической модели движения.

Значения параметров системы ω_1^2, ω_2^2, d_1, d_2, k_1, k_2 следующие:

$$
\begin{aligned}
&\omega_1^2=\frac{c}{J};\ d_1=\frac{\kappa_*}{J};\ k_1=0{,}523\frac{\rho Fl^3}{J};\\
&\omega_2^2=\frac{EJ_{\text{ст}}}{\rho F}\frac{r_1^4}{l^4};\ d_2=\frac{E_*J_{\text{ст}}}{\rho F}\frac{r_1^4}{l^4};\ k_2=1{,}319.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Согласно (4), квадраты собственных частот колебаний ω_1^2, ω_2^2 в общем случае могут различаться, но для оптимального функционирования гироскопа параметры системы подбираются таким образом, чтобы частоты собственных колебаний были равны. Поэтому примем $\omega_1=\omega_2=\omega$.

Вынужденные колебания

Рассматривается микромеханический гироскоп с резонатором в виде четырех упругих стержней, помещенный на подвижное основание. Исследование вынужденных колебаний задачи сводится к построению решения линейных нестационарных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\alpha}+\omega^2\alpha=-d_1\dot{\alpha}-2\Omega k_1\dot{\beta};$$
$$\ddot{\beta}+\omega^2\beta=-d_2\dot{\beta}+2\Omega k_2\dot{\alpha}+\tilde{A}\sin\varphi, \quad (5)$$

где $\tilde{A}$ и φ – амплитуда и настраиваемая фаза внешнего воздействия.

Частота внешнего воздействия $\tilde{\omega}_0(\tau)$ является функцией медленного времени $\tau=\varepsilon t$, где $\varepsilon\le 1$ – малый положительный параметр, причем $\dot{\varphi}=\tilde{\omega}_0(\tau)$. Введем безразмерное время $t_*=\omega t$ и коэффициенты демпфирования $d_1=d_2=2\gamma_0\omega$, $\gamma_0\le 1$. Перейдем к новым переменным $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$, сделав такую замену:

$$\alpha=\sqrt{k_1}\hat{\alpha},\ \beta=\sqrt{k_2}\hat{\beta}. \quad (6)$$

Тогда система (5) примет вид (знак «^» опущен):

$$\ddot{\alpha}+\alpha=-2\gamma_0\dot{\alpha}-2K\nu_0\dot{\beta};$$
$$\ddot{\beta}+\beta=-2\gamma_0\dot{\beta}+2K\nu_0\dot{\alpha}+A\sin\varphi; \quad (7)$$
$$A=\frac{\tilde{A}}{\omega^2\sqrt{k_2}}<<1,\ \omega_0(\tau)=\frac{\tilde{\omega}_0(\tau)}{\omega};$$
$$K=\sqrt{k_1k_2},\ \nu_0=\frac{\Omega_0}{\omega}<<1.$$

Здесь A и $\omega_0(\tau)$ – нормализованная амплитуда и безразмерная частота внешнего воздействия; ν_0 – безразмерная постоянная составляющая угловой скорости основания.

В режиме мягкого резонансного воздействия частота внешнего воздействия должна быть близка к собственной частоте колебаний гироскопа, то есть

$$\omega_0(\tau)-1=\Delta\omega(\tau),$$

где $|\Delta\omega(\tau)|\le 1$.

Решение для системы (7) в случае медленно меняющейся частоты внешнего воздействия имеет вид [7]:

$$\alpha=\alpha_0(t,\tau)+\alpha_1(t,\tau);$$
$$\beta=\beta_0(t,\tau)+\beta_1(t,\tau). \quad (8)$$

Причем $|\alpha_1|\le|\alpha_0|$ и $|\beta_1|\le|\beta_0|$ и

$$\alpha_0=p_1(\tau)\sin\varphi+q_1(\tau)\cos\varphi;$$
$$\beta_0=p_2(\tau)\sin\varphi+q_2(\tau)\cos\varphi,$$

где p_1, q_1, p_2, q_2 – медленные переменные.

С использованием метода осреднения [8] получена система дифференциальных уравнений для определения p_1, q_1, p_2, q_2:

$$\frac{dp_1}{dt}+\gamma_0p_1+K\nu_0p_2-\Delta\omega(\tau)q_1=0;$$
$$\frac{dq_1}{dt}+\gamma_0q_1+K\nu_0q_2+\Delta\omega(\tau)p_1=0;$$
$$\frac{dp_2}{dt}+\gamma_0p_2-K\nu_0p_1-\Delta\omega(\tau)q_2=0; \quad (9)$$
$$\frac{dq_2}{dt}+\gamma_0q_2-K\nu_0q_1+\Delta\omega(\tau)p_2=-A.$$

Для построения решения системы (9) введем функции комплексных переменных следующим образом:

$$z_1=p_1+iq_1;$$
$$z_2=p_2+iq_2, \quad (10)$$

где i – мнимая единица.

В результате получим дифференциальные уравнения в новых переменных z_1 и z_2:

$$\frac{dz_1}{dt}+\gamma_0z_1+K\nu_0z_2+i\Delta\omega(\tau)z_1=0;$$
$$\frac{dz_2}{dt}+\gamma_0z_2-K\nu_0z_1+i\Delta\omega(\tau)z_2=-iA. \quad (11)$$

Решение однородной системы (11) при $A = 0$ ищем в виде:

$$z_1=Ce^{\lambda(\tau)},\ z_2=De^{\lambda(\tau)}, \quad (12)$$

где C и D – константы; $\lambda(\tau)$ – корень характеристического уравнения.

Подставив (12) в (11), получим систему уравнений для констант C и D, которую представим в матричном виде

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=0; \quad (13)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{d\lambda}{dt}+\gamma_0+i\Delta\omega(\tau) & K\nu_0\\ -K\nu_0 & \frac{d\lambda}{dt}+\gamma_0+i\Delta\omega(\tau)\end{bmatrix}; \quad (14)$$
$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}C & D\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Решение характеристического уравнение det($\mathbf{A}$) = 0 дает два корня

$$\lambda_j(\tau)=-\gamma_0t\pm iK\nu_0t-i\int_0^t\Delta\omega(\tau)dt,\ j=1,2. \quad (15)$$

Итак, имеем

$$z_1=C_1e^{\lambda_1(\tau)}+C_2e^{\lambda_2(\tau)};$$
$$z_2=D_1e^{\lambda_1(\tau)}+D_2e^{\lambda_2(\tau)}. \quad (16)$$

Найдем в (16) связь между константами C_i и D_i (i = 1, 2). Для этого подставим в систему (13) значение первого корня. Отсюда получим связь между C_1 и D_1. Далее, подставив в первое уравнение значение второго корня, получим связь между C_2 и D_2.

Таким образом, общее решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 e^{\lambda_1(\tau)} + C_2 e^{\lambda_2(\tau)}; \\ z_2 &= -iC_1 e^{\lambda_1(\tau)} + iC_2 e^{\lambda_2(\tau)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Вынужденное решение системы (11) будем искать методом вариации произвольных постоянных, то есть в решении (17) принимаем $C_j = C_j(t)$, (j = 1, 2).

Имеем

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1(t) e^{\lambda_1(\tau)} + C_2(t) e^{\lambda_2(\tau)}; \\ z_2 &= -iC_1(t) e^{\lambda_1(\tau)} + iC_2(t) e^{\lambda_2(\tau)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя (18) в систему (11), получаем систему уравнений для определения $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{dC_1(t)}{dt} e^{\lambda_1(\tau)} + \frac{dC_2(t)}{dt} e^{\lambda_2(\tau)} = 0; \\ &\frac{dC_1(t)}{dt} e^{\lambda_1(\tau)} - \frac{dC_2(t)}{dt} e^{\lambda_2(\tau)} = A. \end{aligned} \tag{19}$$

Решение системы (19)

$$C_j(t) = \pm\frac{1}{2} A \int_0^t e^{-\lambda_j(\tau)} dt, \; (j = 1, 2). \tag{20}$$

Возвращаясь к исходным переменным, запишем частное решение для p_1, q_1, p_2, q_2:

$$\begin{aligned} p_1^{ч}, q_2^{ч} = e^{-\gamma_0 t} \Bigg\{ &\pm\hat{C}_1(t) \cos\left(K\nu_0 t - \int_0^t \Delta\omega(\tau) dt\right) \mp \\ &\mp \check{C}_1(t) \sin\left(K\nu_0 t - \int_0^t \Delta\omega(\tau) dt\right) + \\ &+ \hat{C}_2(t) \cos\left(-K\nu_0 t - \int_0^t \Delta\omega(\tau) dt\right) - \\ &- \check{C}_2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)_2 (t) \sin\left(-K\nu_0 t - \int_0^t \Delta\omega(\tau) dt\right) \Bigg\}; \\ q_1^{ч}, p_2^{ч} = e^{-\gamma_0 t} \Bigg\{ &\check{C}_1(t) \cos\left(K\nu_0 t - \int_0^t \Delta\omega(\tau) dt\right) + \\ &+ \hat{C}_1(t) \sin\left(K\nu_0 t - \int_0^t \Delta\omega(\tau) dt\right) \pm \\ &\pm \check{C}_2(t) \cos\left(-K\nu_0 t - \int_0^t \Delta\omega(\tau) dt\right) \pm \\ &\pm \hat{C}_2(t) \sin\left(-K\nu_0 t - \int_0^t \Delta\omega(\tau) dt\right) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\hat{C}_{1,2}(t) = \pm\frac{1}{2} A \int_0^t e^{\gamma_0 t} \cos\left(-K\nu_0 t + \int_0^t \Delta\omega(\tau) dt\right) dt;$$

$$\check{C}_{1,2}(t) = \pm\frac{1}{2} A \int_0^t e^{\gamma_0 t} \sin\left(-K\nu_0 t + \int_0^t \Delta\omega(\tau) dt\right) dt.$$

Стационарный режим

Для записи общего решения неоднородной задачи (9) необходимо найти начальные условия. Для этого рассмотрим стационарный режим. Считая все параметры в системе (9) постоянными, имеем

$$\begin{aligned} p_1^{(0)} &= \frac{2K\nu_0 A\Delta\omega\gamma_0}{W^2}; \\ q_1^{(0)} &= \frac{A\Delta\omega\left(K^2\nu_0^2 - \Delta\omega^2 - \gamma_0^2\right)}{W^2}; \\ p_2^{(0)} &= \frac{AK\nu_0\left(K^2\nu_0^2 - \Delta\omega^2 + \gamma_0^2\right)}{W^2}; \\ q_2^{(0)} &= \frac{A\gamma_0\left(K^2\nu_0^2 + \Delta\omega^2 + \gamma_0^2\right)}{W^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь

$$W^2 = \left(\Delta\omega^2 + \gamma_0^2\right)^2 + K^2\nu_0^2\left(K^2\nu_0^2 - 2\left(\Delta\omega^2 - \gamma_0^2\right)\right).$$

Запишем выражения для амплитуд колебаний резонатора по двум обобщенным координатам:

$$A^{(0)} = \sqrt{\left(p_1^{(0)}\right)^2 + \left(q_1^{(0)}\right)^2};$$

$$B^{(0)} = \sqrt{\left(p_2^{(0)}\right)^2 + \left(q_2^{(0)}\right)^2}$$

и получим

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \frac{2K\nu_0 A}{W}; \\ B^{(0)} &= \frac{A\sqrt{\left(\Delta\omega^2 + \gamma_0^2\right)}}{W}. \end{aligned} \tag{23}$$

В резонансном случае ($\Delta\omega = 0$) на неподвижном основании ($\nu_0 = 0$) максимальное значение амплитуды колебаний по второй обобщенной координате равно A/γ_0. Установлено, что на подвижном основании отношение амплитуд $B^{(0)}$ и $A^{(0)}$ пропорционально модулю угловой скорости основания, то есть гироскоп является датчиком угловой скорости:

$$\nu_0 = \frac{A^{(0)}\sqrt{\left(\Delta\omega^2 + \gamma_0^2\right)}}{KB^{(0)}}. \qquad (24)$$

Числовой пример

В качестве примера рассматривается микромеханический гироскоп, резонатор которого представляет собой стержни длиной l = 20 мм с прямоугольным сечением b = 0,33 мм и h = 1 мм, изготовленные из плавленого кварца (ρ = 2201 кг/м^3, E = 73 ГПа). При обобщенном моменте инерции $J = 3\cdot10^{-8}$ кг·м^2 с учетом совмещения частот собственных колебаний имеем c = 254,9 Н·м, k_1 = 0,1013, k_2 = 1,319, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ = 92987 рад/с (14,806 кГц). Коэффициент вязкого трения $\gamma_0 = 0{,}9\varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-5}$.

Пусть частота вынуждающей силы изменяется по закону

$$\Delta\omega_0(\tau) = \Delta\omega(0)(1 - 0{,}1\varepsilon t) + 1.$$

Примем следующие нормализованные параметры:

$$\nu_0 = 4\varepsilon; \quad A = 2{,}1\cdot10^{-3}\varepsilon; \quad \Delta\omega(0) = -10\varepsilon.$$

Тогда соответствующие размерные параметры углового движения:

$$\Omega_0 = 3{,}71c^{-1}; \; \tilde{A} = 208{,}5c^{-1}; \; \Delta\tilde{\omega}(0) = -1{,}48\,Гц.$$

Амплитуды колебаний резонатора равны:

$$A = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}; \quad B = \sqrt{p_2^2 + q_2^2}. \qquad (25)$$

На рисунке 2 приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) для амплитуды колебаний A по первой обобщенной координате и амплитуды колебаний B по второй обобщенной координате (жирная линия). Тонкой линией на графиках изображены амплитудно-частотные характеристики в стационарном режиме.

Заметим, что выбранный закон изменения частоты вынуждающей силы означает «движение» по графику слева направо.

Наличие угловой скорости основания ($\nu_0 \neq 0$) вызывает раздвоение кратной собственной частоты на две близкие частоты (см. рис. 2). На стационарной кривой для амплитуды вторичных колебаний отчетливо видны два пика, в то время как амплитуды первичных колебаний оказываются менее чувствительными к раздвоению частот.

Для амплитуды A наблюдается увеличение первого максимума на 12,61 % и уменьшение второго на 20,45 %. Для амплитуды B наблюдается уменьшение первого максимума на 4,76 % и второго – на 2,38 %. Максимумы амплитуд на обоих графиках смещены относительно максимумов стационарной кривой. После прохождения второго максимума наблюдаются «биения» амплитуд.

Таким образом, наличие плавно меняющейся во времени частоты внешнего воздействия оказывает существенное влияние на картину колебаний микромеханического гироскопа. Найденное решение системы линейных дифференциальных уравнений для медленных переменных может быть использовано для более точной оценки углового движения основания ММГ с учетом медленно изменяющихся внешних условий функционирования [3].

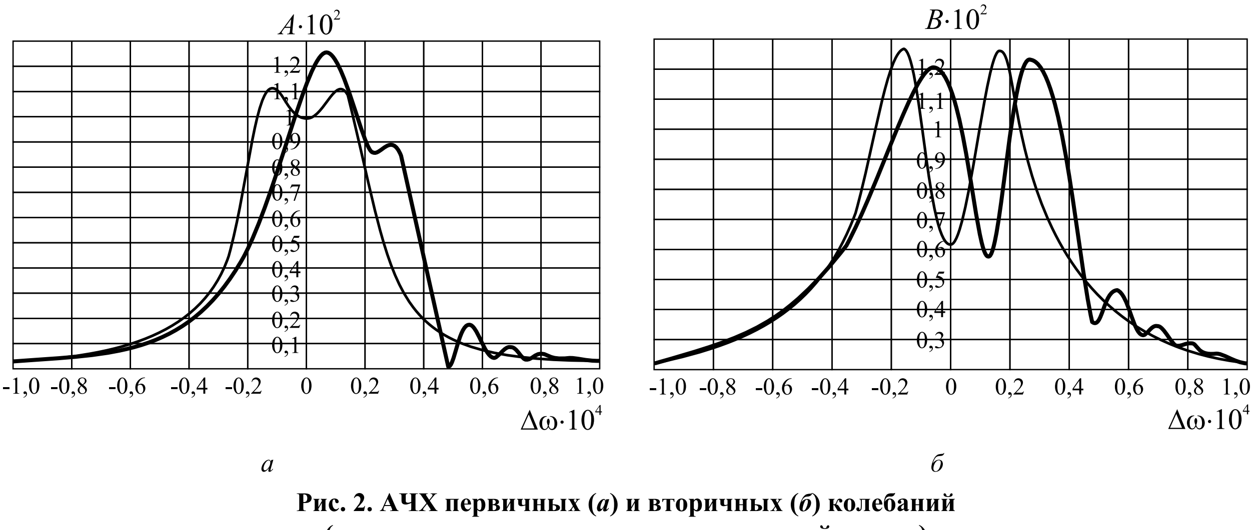

Рис. 2. АЧХ первичных (*а*) и вторичных (*б*) колебаний (тонкая сплошная линия – стационарный режим)

Заключение

Развитие приборостроения для различных областей (оборонная промышленность, медицина и др.), которое включает в себя системы высокоточной навигации и управление движением объектов, повышает требования к созданию совершенно новых и улучшению характеристик уже существующих микромеханических приборов. Проблема повышения точности микромеханических датчиков инерциальной информации может быть решена с помощью применения новых МЭМС (микроэлектромеханических) технологий, технических решений и методик проектирования на основе новых математических моделей функционирования.

В работе данная задача решалась в рамках исследования вынужденных линейных колебаний микромеханического гироскопа при плавном изменении частоты внешнего воздействия. Получено точное решение дифференциальных уравнений для медленных переменных в режиме вынужденных колебаний при плавном изменении частоты внешнего воздействия. Установлено, что наличие угловой скорости основания приводит к раздвоению кратной собственной частоты на две близкие частоты (два резонансных пика на амплитудно-частотных характеристиках). Показано, что медленное изменение частоты вынуждающей силы приводит к изменению абсолютной величины максимума амплитуд по сравнению со стационарной кривой. Замечено, что резонансные пики существенно смещены относительно пиков стационарной кривой до первого максимума, и после прохождения второго максимума наблюдаются биения амплитуд.

Список литературы

1. *Степанов А.С., Подалков В.В., Сбытова Е.С.* Динамика микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней на вибрирующем основании // Машиностроение и инженерное образование. 2015. № 2. С. 15–21.
2. *Сбытова Е.С.* Динамика микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин: дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2014. – 128 с.
3. *Степанов А.С., Подалков В.В., Сбытова Е.С.* Влияние медленно меняющейся частоты угловой вибрации основания на динамику микромеханического гироскопа камертонного типа // Машиностроение и инженерное образование. 2016. № 1. С. 10–16.
4. *Журавлев В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Известия РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
5. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. – 733 с.
6. *Стретт Дж.В. (лорд Релей)* Теория звука. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1955. – 484 с.
7. *Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 228 с.
8. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. Пер. с англ. М.: Мир, 1976. – 456 с.

Материал поступил в редакцию 19.05.2016

СТЕПАНОВ Алексей Сергеевич E-mail: **steepanov@mail.ru** Тел.: **(903) 014-44-00**	Магистрант кафедры теоретической механики и мехатроники Национального исследовательского университета «МЭИ». Сфера научных интересов: мехатроника и робототехника, теоретическая механика, гироскопия, навигация. Автор четырех тезисов докладов, четырех научных статей.
СБЫТОВА Екатерина Сергеевна E-mail: **sbytovaes@ya.ru** Тел.: **(917) 547-22-57**	Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теоретической механики и мехатроники Национального исследовательского университета «МЭИ». Сфера научных интересов: мехатроника и робототехника, теория колебаний и устойчивость движения, математическое моделирование технических систем, теоретическая механика, гироскопия. Автор шести научных статей, одного свидетельства о создании программы для ЭВМ.
ПОДАЛКОВ Валерий Владимирович Тел.: **(903) 581-73-34**	Доктор технических наук, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники Национального исследовательского университета «МЭИ». Сфера научных интересов: теория упругости; теоретическая механика; теория колебаний и устойчивость движения; методы математического моделирования, оценивания и управления механическими и биомеханическими системами; регулярная и хаотическая динамика механических систем; механика машин и роботов; механика технологических процессов; мехатроника и робототехника; теория, методы проектирования и эффективность функционирования технических систем; навигация, наведение и управление подвижными объектами; гироскопия. Автор одной монографий и более 100 научных статей.