

УДК 539.3

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ С УЧЕТОМ СВОЙСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СРЕДЫ И ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ В ОБЛАСТИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ\*

А.Р. Мифтахова, И.Г. Горячева

*В данной работе рассмотрена контактная задача в плоской постановке о качении жесткого цилиндра по основанию, состоящему из вязкоупругой полосы, сцепленной с жесткой полуплоскостью. Для описания характеристик тонкого вязкоупругого слоя используется модель Кельвина. Предполагается, что область контакта состоит из двух (сцепления и проскальзывания) или трех (проскальзывания-сцепления-проскальзывания) зон. Предложен метод расчета нормальных и касательных напряжений в области контактного взаимодействия. Распределения контактных напряжений и зависимость коэффициента сцепления от величины относительно проскальзывания изучаются при различных значениях коэффициента трения скольжения и параметров, характеризующих вязкие свойства слоя. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании сил трения в контакте качения полимерных покрытий.*

**Ключевые слова:** вязкоупругий слой, модель Кельвина, относительное проскальзывание, трение качения, коэффициент трения, коэффициент сцепления.

## MODELING THE ROLLING FRICTION ALLOWING FOR THE INTERMEDIATE AGENT PROPERTIES AND THE RELATIVE SLIP IN A CONTACT INTERACTION AREA

A.R. Miftakhova, I.G. Goryacheva

*The 2D contact problem for a rigid cylinder rolling on a thin viscoelastic layer bonded to a rigid half-plane is considered. The Kelvin model is used to describe the viscoelastic properties of the layer. The contact area is assumed to be of two (stick-slip) or three (slip-stick-slip) zones. The method to calculate the normal and shear stresses within the contact area is presented. The contact stress distributions and the dependence of the traction coefficient on the relative slip are studied for various values of the coefficient of sliding friction and the layer viscosity parameters. The results can be used for modeling the friction force in rolling contact of polymer coatings.*

**Keywords:** viscoelastic layer, Kelvin model, relative slip, rolling friction, friction coefficient, traction coefficient.

### Введение

При качении одного тела по поверхности другого возникает сила сопротивления, называемая силой трения качения. В разное время исследованию данной силы было посвящено большое количество экспериментальных работ [1–3], в которых в качестве причин возникновения силы сопротивления при качении были ука-

заны частичное проскальзывание поверхностей катящегося тела и основания и несовершенная упругость материалов, из которых изготовлены взаимодействующие тела. При моделировании трения качения поиск касательных напряжений затруднен в связи с тем, что границы зон проскальзывания и сцепления на площадке контакта заранее неизвестны. А.Ю. Ишлинский

\* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-29-00198).

исследовал трение качения жесткого диска по упругой полуплоскости, для описания поведения которой под нагрузкой использовалась система упругих стержней, которые отклонялись в сторону и изменяли свою высоту пропорционально действующим на них силам [4]. В работе Калкера [5] теоретически и экспериментально изучался контакт качения двух цилиндров с покрытиями из вязкоупругих материалов, в частности резины. Для исследований использовались вариационные методы определения напряжений в зоне контакта для упругих и вязкоупругих покрытий.

Ранее плоская задача о сопротивлении качению при наличии на поверхности одного из взаимодействующих тел вязкоупругого слоя была рассмотрена в работах [6, 7], где для описания механического поведения слоя использовалась модель Максвелла, а цилиндр и полуплоскость полагались упругими. В работе [6] изучено влияние тонких поверхностных пленок на растягивающие и максимальные касательные напряжения при качении с проскальзыванием цилиндра по упругому полупространству. Полученные результаты показали, что наличие вязкоупругого слоя позволяет уменьшить значения растягивающих напряжений. Из расчетов, приведенных в монографии [7], следует, что вязкоупругий слой влияет на распределение контактного давления при относительно малых скоростях движения цилиндра.

В данном исследовании решается задача о качении жесткого цилиндра по вязкоупругому слою, сцепленному с недеформируемой полуплоскостью, при наличии в области контакта зон сцепления и проскальзывания. При постановке задачи не учитываются податливости цилиндра и полуплоскости, а для описания свойств слоя используется модель Кельвина, которая обладает ограниченной ползучестью и хорошо описывает свойства вязкоупругих покрытий.

Цель данной работы – в рамках используемой модели вязкоупругого слоя получить распределения нормальных и касательных напряжений на площадке контакта, определить расположение зон проскальзывания и сцепления в области контакта цилиндра и основания и провести анализ влияния свойств промежуточного слоя на силу трения качения при различных величинах относительного проскальзывания контактирующих тел.

### Постановка задачи

Рассмотрим задачу в плоской постановке для жесткого цилиндра и основания, состоящего из вязкоупругого слоя толщиной  $h$ , сцепленного с жесткой полуплоскостью. Цилиндр катится по основанию с постоянной линейной скоростью  $V$  и угловой скоростью  $\omega$ . Линия контакта цилиндра и основания описывается функцией  $f(x) = -\frac{x^2}{2R}$ , где  $R$  – радиус цилиндра. Введем неподвижную систему координат  $(x', y')$ , связанную с основанием, и подвижную  $(x, y)$ , связанную с катящимся цилиндром (рис. 1), так что

$$x' = x + Vt; \quad (1)$$

$$y' = y. \quad (2)$$

Цилиндр находится под действием нагрузки  $P$ , действующей по нормали к поверхности слоя, и силы реакции  $P_1$ , направленной противоположно действующей силе  $P$ , а также тангенциальной силы  $T$  и действующей в противоположном направлении силы сопротивления  $T_1$ .

Для описания нормальной и тангенциальной податливости слоя используется модель Кельвина, которая представляет собой последовательное соединение пружины и элемента Фойгта и обладает ограниченной ползучестью:

$$v + T_\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{h}{E_L} (p + T_\sigma \frac{\partial p}{\partial t}); \quad (3)$$

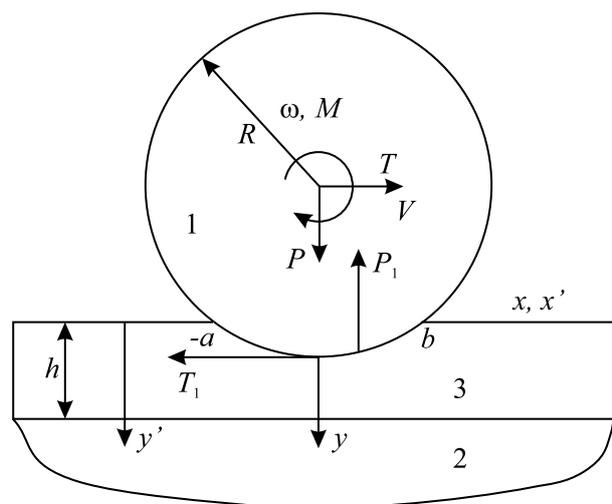


Рис. 1. Схема контакта цилиндра (1) и вязкоупругого слоя (3), сцепленного с жестким основанием (2):  $a, b$  – координаты границ области контакта;  $M$  – движущий момент

$$u + T_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{h}{E_L} (\tau + T_\sigma \frac{\partial \tau}{\partial t}). \quad (4)$$

где  $v$  и  $u$  – нормальное и тангенциальное перемещения вязкоупругого слоя;  $T_\varepsilon$ ,  $T_\sigma$  – времена последействия и релаксации (в принятой модели времена последействия и релаксации в различных направлениях считаются одинаковыми);  $E_L$  – длительный модуль упругости;  $p(x)$  – нормальное давление;  $\tau(x)$  – тангенциальное напряжение на площадке контакта.

В подвижной системе координат соотношения (3) и (4) примут вид

$$v - T_\varepsilon V \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{h}{E_L} (p - T_\sigma V \frac{\partial p}{\partial x}); \quad (5)$$

$$u - T_\varepsilon V \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h}{E_L} (\tau - T_\sigma V \frac{\partial \tau}{\partial x}). \quad (6)$$

В условиях трения качения площадка контакта цилиндра и основания  $x \in (-a, b)$  разбивается на зоны сцепления  $\Omega_A$  и проскальзывания  $\Omega_S$  [6]. В подобласти скольжения абсолютное значение тангенциального напряжения связано с нормальным давлением по закону Кулона – Амонтона, и тангенциальные напряжения направлены противоположно скоростям проскальзывания:

$$|\tau(x)| = \mu p(x), \quad x \in \Omega_S. \quad (7)$$

В случае полного скольжения равенство (7) выполняется на всей области контакта цилиндра и основания.

В подобласти сцепления  $\Omega_A$  равны скорости контактирующих точек цилиндра и вязкоупругого слоя. Для тангенциальных смещений точек цилиндра выполняется соотношение

$$\frac{du_1}{dx} = \Delta, \quad y = 0, \quad x \in \Omega_A; \quad (8)$$

$$\Delta = \frac{V - \omega R}{V}, \quad (9)$$

где  $\Delta$  – величина относительного проскальзывания.

В зоне сцепления  $\Omega_A$  имеет место следующее неравенство:

$$|\tau(x)| \leq \mu p(x), \quad x \in \Omega_A. \quad (10)$$

Для всех точек из области контакта выполняется соотношение:

$$v = d - \frac{x^2}{2R}, \quad x \in (-a, b), \quad (11)$$

где  $d$  – глубина внедрения цилиндра в основание.

Соотношения (5)–(9) используются для расчета распределения контактного давления и касательных напряжений в области контакта цилиндра с вязкоупругим слоем, лежащим на жесткой полуплоскости.

### Расчет контактного давления

В принятой модели вязкоупругого слоя нормальные и тангенциальные контактные напряжения не зависят друг от друга, поэтому сначала проведем расчет распределения контактного давления на площадке контакта. Из соотношений (4), (6) и (9) получим:

$$d - \frac{x^2}{2R} - T_\varepsilon V \frac{\partial \left( d - \frac{x^2}{2R} \right)}{\partial x} = \frac{h}{E_L} \left( p - T_\sigma V \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad x \in (-a, b). \quad (12)$$

Введем безразмерные величины

$$x = \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \xi, \quad L = \frac{a+b}{2R}, \quad \varepsilon = \frac{b-a}{a+b}, \quad \delta = \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma}, \quad \zeta = \frac{2T_\sigma V}{a+b}, \quad (13)$$

$$A_1 = \frac{d}{h}, \quad A_2 = \frac{R}{2h}, \quad \tilde{p}(\xi) = \frac{1}{E_L} p \left( \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \xi \right),$$

и после приведения соотношения (12) к виду

$$A_1 - L^2 A_2 (\xi + \varepsilon)^2 + 2\zeta \delta L^2 A_2 (\xi + \varepsilon) = \tilde{p}(\xi) - \zeta \frac{d\tilde{p}}{d\xi} \quad (14)$$

найдем выражение для распределения контактного давления:

$$\tilde{p} = A_1 - A_2 L^2 (\xi + \varepsilon)^2 + A_2 L^2 \zeta (\xi + \varepsilon) (\delta - 2) + A_2 L^2 \zeta (\delta - 1) + C e^{\xi/\zeta}. \quad (15)$$

Постоянные  $C$ ,  $\varepsilon$  и  $L$  находятся из условия равенства давления нулю в граничных точках области контакта

$$\tilde{p}(-1) = \tilde{p}(1) = 0 \quad (16)$$

и условия равновесия нормальных сил, действующих на цилиндр,

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}(\xi) d\xi = \tilde{P}, \quad (17)$$

где  $\tilde{P}$  – безразмерная нагрузка, приложенная к цилиндру.

График зависимости распределения контактного давления в области контакта от отношения времени последствия ко времени релаксации материала слоя  $\delta$  (рис. 2) показывает, что с увеличением параметра  $\delta$  эпюра распределения контактного давления становится более несимметричной.

Результаты расчетов и графики зависимости параметра  $\varepsilon$ , характеризующего смещение площадки контакта в направлении движения цилиндра, от параметра  $\zeta$ , представляющего собой отношение времени релаксации материала слоя ко времени, за которое цилиндр проходит половину ширины площадки контакта (рис. 3), свидетельствуют о немонотонной зависимости данных параметров. При очень малых и очень больших временах релаксации и значениях скорости движения цилиндра, смещение площадки контакта уменьшается, а распределение давления стремится к распределению давления для упругого слоя с длительным или мгновенным модулем упругости.

### Расчет касательных напряжений

Для определения функции касательных напряжений на площадке контакта восполь-

зуемся соотношениями (5), (7), (8) и (9), из которых получим следующее уравнение для распределения касательных напряжений в зоне сцепления:

$$\frac{h}{T_\varepsilon V E_L} \tau(x) - \frac{h T_\sigma}{E_L T_\varepsilon} \frac{\partial \tau(x)}{\partial x} = \frac{u(x)}{T_\varepsilon V} - \frac{2}{a+b} \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \quad x \in \Omega_A. \quad (18)$$

При переходе к безразмерным параметрам (13) уравнение (18) примет вид:

$$\tilde{\tau}(\xi) - \zeta \frac{\partial \tilde{\tau}(\xi)}{\partial \xi} = \tilde{u}(\xi) - \zeta \delta \frac{\partial \tilde{u}(\xi)}{\partial \xi}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}_A \cup \tilde{\Omega}_S, \quad (19)$$

$$\text{где } \tilde{\tau}(\xi) = \frac{1}{E_L} \tau \left( \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \xi \right),$$

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{1}{h} u \left( \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \xi \right). \quad (20)$$

В зоне проскальзывания, учитывая (6), получим уравнение для поиска функции касательных перемещений с точностью до некоторой постоянной, которую определим из условия равенства нулю функции перемещений на границе области контакта:

$$\mu \left( \tilde{p}(\xi) - \zeta \frac{\partial \tilde{p}(\xi)}{\partial \xi} \right) = \tilde{u}(\xi) - \zeta \delta \frac{\partial \tilde{u}(\xi)}{\partial \xi}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}_S; \quad \tilde{u}(-1) = 0. \quad (21)$$

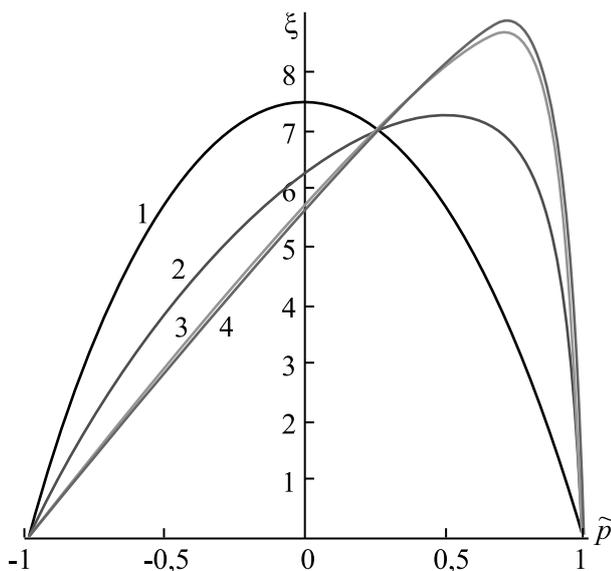


Рис. 2. Распределение контактного давления в области контакта  $\tilde{p} = \tilde{p}(\xi)$  при  $\tilde{P} = 10$ ,  $\zeta = 0,1$ ,  $R/(2h) = 10$  и  $\delta = 1$  (1),  $\delta = 10$  (2),  $\delta = 100$  (3),  $\delta = 1000$  (4)

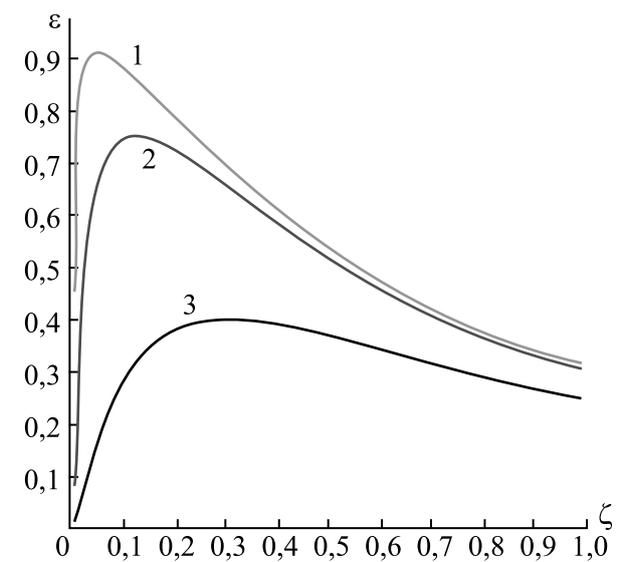


Рис. 3. Зависимость смещения области контакта  $\varepsilon$  от параметра  $\zeta$  при  $\tilde{P} = 10$ ,  $R/(2h) = 10$  и  $\delta = 1$  (1),  $\delta = 10$  (2),  $\delta = 100$  (3)

В зоне сцепления выполняется равенство (8), откуда с учетом (13) найдем касательные перемещения с точностью до некоторой постоянной  $C$  (которую определим затем из граничных условий):

$$\tilde{u}(\xi) = \tilde{\Delta}\xi + C, \quad \xi \in \tilde{\Omega}_A, \quad (22)$$

где  $\tilde{\Delta} = 2LA_2\Delta$ .

Для определения координат точек  $\xi_i$ , в которых одна зона переходит в другую, воспользуемся непрерывностью функций касательных напряжений и перемещений в этих точках:

$$\tilde{\tau}(\xi_i) = \mu\tilde{p}(\xi_i);$$

$$\tilde{u}(\xi_i - 0) = \tilde{u}(\xi_i + 0), \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad (23)$$

$$\tilde{\tau}(\xi_i - 0) = \tilde{\tau}(\xi_i + 0), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

где  $k + 1$  – общее число зон проскальзывания и сцепления.

При численном расчете касательных напряжений и перемещений в зонах сцепления и проскальзывания использовался следующий алгоритм. При заданных характеристиках вязкоупругого слоя и цилиндра принималось допущение, что крайняя точка зоны сцепления совпадает с начальной точкой области контакта. Тогда с учетом этого граничного условия определяются неизвестные постоянные в функциях касательного перемещения и напряжения из соотношений (19)–(22). Для существования площадки контакта, состоящей из одной зоны

проскальзывания и одной зоны сцепления, полученное решение должно удовлетворять условиям непрерывности (23) в точке  $\xi_1$  на границе двух зон при некоторых значениях величины относительного проскальзывания  $\Delta$ . Если заданная величина относительного проскальзывания превосходит некоторое значение  $\Delta_1$ , при котором условие непрерывности напряжений на границе зон не выполняется, надо искать функции касательных перемещений и напряжений исходя из предположения о существовании двух зон проскальзывания и одной зоны сцепления. При дальнейшем увеличении  $\Delta$  получим переход от трехзонной области контакта к случаю чистого скольжения.

### Анализ результатов расчетов

На основании расчетов контактного давления и касательных напряжений, проведенных по изложенному выше алгоритму, можно оценить влияние характеристик вязкоупругого слоя на распределение касательных напряжений на площадке контакта. На рисунке 4 представлены графики распределения касательных напряжений на площадке контакта при различных значениях параметра  $\Delta$ , характеризующего относительное проскальзывание поверхностей. Графики, обозначенные пунктирными линиями, соответствуют случаю чистого скольжения точек цилиндра по вязкоупругому слою, сцепленному с основанием, т.е. функции  $\mu p(\xi)$ .

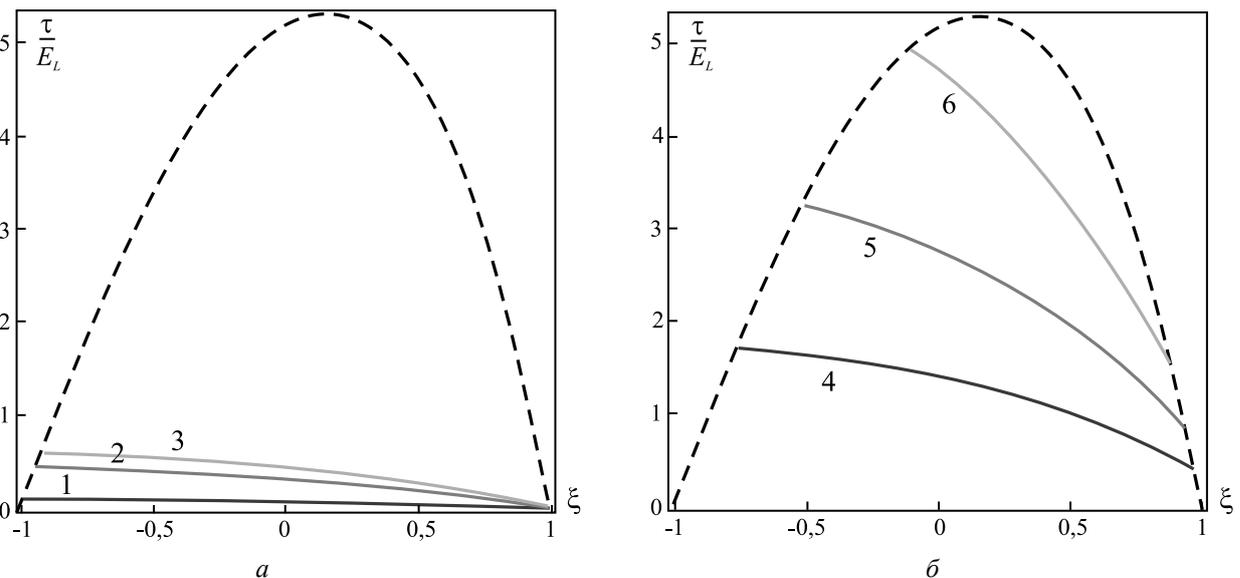


Рис. 4. Распределение касательных напряжений  $\tilde{\tau}$  в области контакта при существовании двух (а) и трех (б) зон при  $\tilde{P} = 10$ ,  $\zeta = 1$ ,  $\delta = 1000$ ,  $R/(2h) = 10$ ,  $\mu = 0,7$  и  $\Delta = 0,0001$  (1),  $\Delta = 0,0005$  (2),  $\Delta = 0,0007$  (3),  $\Delta = 0,001$  (4),  $\Delta = 0,004$  (5),  $\Delta = 0,007$  (6)

Результаты показывают, что размер зон сцепления уменьшается при увеличении значения  $\Delta$ . Также при увеличении этого параметра в области контактного взаимодействия происходит переход от двух зон к трем зонам (скольжение-сцепление-скольжение). При этом максимальные касательные напряжения в области сцепления возрастают.

### Анализ зависимости коэффициента сцепления от относительного проскальзывания

Суммарная касательная сила, действующая на цилиндр при качении, определяется соотношением:

$$T = \int_{-1}^1 \tilde{\tau}(\xi) d\xi. \quad (24)$$

На рисунке 5 представлены графики зависимостей величины  $\frac{T}{P}$  (коэффициента сцепления) от величины относительного проскальзывания ( $\Delta$ ) при различных значениях коэффициента трения ( $\mu$ ) и отношения времен последействия и релаксации материала вязкоупругого слоя ( $\delta$ ). Сопоставляя кривые 1, 2 и 3, можно сделать вывод, что уменьшение параметра  $\delta$ , характеризующего отношение времени последействия ко времени релаксации вязкоупругого слоя, ведет к уменьшению коэффициента сцепления. Сравнение зависимостей, полученных при различных коэффициентах трения, позволяет сделать вывод, что при одних и тех же величинах относительного проскальзывания увеличение коэффициента трения приводит к росту коэффициента сцепления.

### Заключение

В ходе проведенного исследования построена модель для анализа влияния механических характеристик промежуточного вязкоупругого слоя на контактные характеристики и силу трения при качении жесткого цилиндра по жесткому основанию. Вязкоупругое поведение слоя в нормальном и касательном направлениях описано с помощью модели Кельвина. Принято во внимание существование зон сцепления и относительного проскальзывания поверхностей взаимодействующих тел в области их контакта. В результате решения задачи определены распределения нор-

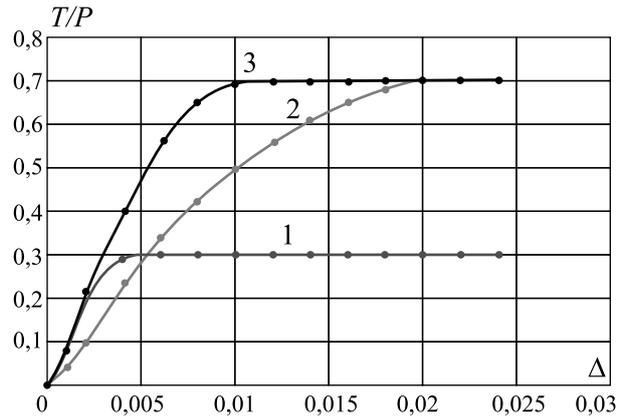


Рис. 5. Зависимость коэффициента сцепления  $T/P$  от величины относительного проскальзывания  $\Delta$  при  $\dot{P} = 10$ ,  $R/(2h) = 10$ :  
1 –  $\mu = 0,3$ ,  $\delta = 1000$ ; 2 –  $\mu = 0,7$ ,  $\delta = 1000$ ;  
3 –  $\mu = 0,7$ ,  $\delta = 500$

мальных и касательных напряжений на площадке контакта, а также размеры и положение зон сцепления и проскальзывания в области контакта. Показано, что в области контакта возможно существование как двух (проскальзывание-сцепление), так и трех (проскальзывание-сцепление-проскальзывание) зон. Проведен анализ влияния механических и геометрических характеристик тонкого вязкоупругого слоя, скорости качения, радиуса цилиндра, а также коэффициента трения скольжения на распределение нормальных и касательных напряжений на площадке контакта. Получена зависимость коэффициента сцепления от величины относительного проскальзывания при различных значениях вязкости тонкого слоя и коэффициентах трения.

Результаты проведенного исследования могут быть использованы для анализа влияния тонких полимерных покрытий на характеристики контактного взаимодействия и силу сопротивления в условиях трения качения.

### Список литературы

1. Reynolds O. On rolling friction. Philosophical Transactions of the Royal Society. 1875. Vol. 166. P. 155–163.
2. Dupuit J. Essai et expériences sur le tirage des voitures et sur le frottement de seconde espèce // Carilian – Goeury, 1837. – 167 p.
3. Tabor D. The mechanism of rolling friction: the elastic range // Proceedings of the Royal Society. 1955. Vol. 229. P. 198–233.

4. Ишлинский А.Ю. Трение качения // Прикладная математика и механика. 1939. Т. 2. С. 245–260.
5. Kalker J.J. Viscoelastic multilayered cylinders rolling with dry friction // ASME. Journal of Applied Mechanics. 1991. V. 58. P. 666–679.
6. Горячева И.Г., Захаров С.М., Торская Е.В. Влияние относительного проскальзывания и свойств поверхностного слоя на напряженное состояние упругих тел при трении качения // Трение и износ. 2003. № 1. С. 5–15.
7. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. – 480 с.

Материал поступил в редакцию 09.02.2016

**МИФТАХОВА  
Альмира Рифовна**

E-mail: mif-almira@yandex.ru  
Тел.: (495) 434-36-92

Студентка бакалаврской программы «Прикладная физика и математика» Московского физико-технического института (ГУ). Сфера научных интересов: трибология, механика контактных взаимодействий.

**ГОРЯЧЕВА  
Ирина Георгиевна**

E-mail: goryache@ipmnet.ru  
Тел.: (495) 434-36-92

Академик РАН, доктор физико-математических наук, заведующая лабораторией трибологии Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН). Сфера научных интересов: механика деформируемого твердого тела, механика контактных взаимодействий, трибология. Автор более 200 публикаций, в том числе четырех монографий, ряда изобретений.