УДК 539.374

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ ТИПА МАКСВЕЛЛА: СВОЙСТВА КРИВЫХ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ СТУПЕНЧАТЫХ НАГРУЖЕНИЯХ И УСЛОВИЯ НАКОПЛЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

А.В. Хохлов

В работе исследуется нелинейное определяющее соотношение для вязкоупругопластичных разносопротивляющихся материалов с двумя произвольными материальными функциями одного аргумента (в одноосном случае при постоянной температуре). Оно нацелено на описание комплекса основных механических эффектов, типичных для материалов, обладающих наследственностью и высокой чувствительностью к скорости деформирования, имеющих «площадку текучести» на диаграмме деформирования и выраженную стадию установившей ползучести (полимеры, твердое топливо, асфальтобетон, композиты, титановые и алюминиевые сплавы, углеродные и керамические материалы при высоких температурах и др.). При минимальных первичных ограничениях на материальные функции аналитически изучены общие качественные свойства кривых ползучести при произвольных ступенчатых нагружениях, порожденных этим определяющим соотношением, в частности, кривых обратной ползучести. Эти свойства сопоставлены с типичными свойствами экспериментальных кривых широкого класса вязкоупругопластичных материалов для выявления феноменологических ограничений на материальные функции, арсенала возможностей и области применимости нелинейного определяющего соотношения типа Максвелла. Получены формулы для мощности диссипации, скорости ползучести, отклонения от кривой ползучести при мгновенном нагружении, пластической (необратимой) деформации и скорости ее накопления при циклических нагружениях. Установлено отсутствие свойства затухания памяти, выведены критерии моделирования рэтчетинга и эффекта Кольрауша.

Ключевые слова: *вязкоупругопластичность, нелинейное определяющее соотношение, кривые ползучести, ступенчатое нагружение, скорость ползучести, пластическая деформация, рэтчетинг, скоростная чувствительность, сверхпластичность*

THE NONLINEAR MAXWELL-TYPE VISCOELASTOPLASTIC MODEL: PROPERTIES OF CREEP CURVES AT PIECEWISE-CONSTANT STRESS AND CRITERION FOR PLASTIC STRAIN ACCUMULATION

A.V. Khokhlov

The nonlinear constitutive equation with two arbitrary material functions is formulated for viscoelastoplastic multi-modulus materials and studied analytically in uniaxial case. The constitutive equation developed herein is aimed at adequate modeling of the rheological phenomena set which is typical for materials exhibiting non-linear hereditary properties, strong strain rate sensitivity, secondary creep, yielding at constant stress and tension compression asymmetry. It is applicable for simulation of mechanical behaviour of various polymers, solid propellants, sand-asphalt concrete, composite materials, titanium and aluminum alloys, ceramics at high temperature and so on. Under minimal primary restrictions on two material functions, the general equation and basic properties of theoretic creep curves generated by the constitutive equation for piecewise-constant stress histories are analyzed. The qualitative features of theoretic creep curves are compared to typical test creep curves of viscoelastoplastic materials under multi-step uniaxial loadings in order to examine the model abilities to provide an adequate description of basic rheological phenomena related to creep, recovery and cyclic step-wise loading, to find necessary phenomenological restrictions which should be imposed on material functions and to indicate the field of applicability or non-applicability of the model. The relations between stress and strain jumps and expressions for dissipation rate, creep rate and plastic (irreversible) strain are derived. Current strain invariance under permutation of previous loading steps and lack of the fading memory property are proved. The criteria for the Kohlrausch effect simulation is found. The formula for the rate of plastic strain accumulation under cyclic stepwise loading is obtained and ratcheting simulation is revealed to be immanent to the model.

Keywords: *viscoelastoplasticity, nonlinear constitutive equation, creep curves at piecewise-constant loading, recovery, creep rate, plastic strain, cyclic loading, ratcheting, rate sensitivity, superplasticity*

Введение. Нелинейная модель Максвелла

Будем рассматривать изотермические одномерные процессы, характеризуемые в точке тела историей напряжения $\sigma(t)$ и (логарифмической) деформацией $\varepsilon(t)$, $t>0$. Связь между процессами $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ зададим по аналогии с реологической моделью Максвелла (последовательным соединением линейных упругого и вязкого элементов), т.е. постулируем, что деформация $\varepsilon(t)$ представима суммой упругой ε_e и вязкопластической ε_v компонент, каждая из которых зависит от (безразмерного) напряжения $\sigma(t)$, но нелинейно:

$$\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_v,\ \varepsilon_e=F(\sigma)/E,\ \dot\varepsilon_v=V(\sigma)/\eta. \quad (1)$$

Определяющее соотношение (ОС) (1) содержит две материальные функции (МФ) $F(x)$ и $V(x)$, $x\in(\omega_-,\omega_+)$, $\omega_-<0$, $\omega_+>0$, и две постоянные: «модуль упругости» $E>0$ и коэффициент вязкости $\eta>0$. Параметры ω_+ и ω_- могут быть интерпретированы как пределы прочности при растяжении и сжатии (если для моделируемого материала характерно разрушение или резкое изменение свойств при некотором критическом напряжении). Параметры E и η выделены из МФ F и V для удобства сопоставления с линейной моделью Максвелла (получающейся при $V(x)=F(x)=x$) и учета влияния температуры в форме $E=E(T)$, $\eta=\eta(T)$ [1]. Процессы $\sigma(t)$ предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими (при $t<0$ считаем, что $\sigma=0$). Обезразмеривание напряжения можно производить делением на cE, c>0, или на характерное напряжение материала (предел упругости, ползучести, текучести, прочности и т.п.). Безразмерное время вводится делением на характерное время, например, на время релаксации линейной модели Максвелла $\tau_r=\eta/E$ при фиксированной температуре (при таком масштабировании $\tau_r=1$ и $\eta=E$ во всех последующих формулах при данной T).

Материальная функция $F(x)$ определяет закон упругого деформирования $\varepsilon_e=F(\sigma)/E$. Поэтому минимальные первичные ограничения на $F(x)$ (естественные с точки зрения феноменологии и минимальные математические [1]) таковы: $F(x)$ – непрерывная строго возрастающая функция с кусочно-непрерывной производной на интервале (ω_-,ω_+), такая, что $F(0)=0$ (тогда $xF(x)>0$, т.е. $\operatorname{sgn}F(x)=\operatorname{sgn}x$). Последние два условия обеспечивают совпадение знаков упругой деформации ε_e и напряжения и отсутствие упругой деформации при нулевом напряжении. Строгое возрастание $F(x)$ равносильно требованию возрастания ε_e с ростом σ. Из возрастания $F(x)$ следует существование обратной функции $f=F^{-1}$ на промежутке $(\underline{y};\overline{y})$, где $\overline{y}:=\sup F(x)=F(\omega_+-0)$, $\underline{y}:=\inf F(x)=F(\omega_-+0)$. Дифференцируемость $F(x)$ требуется для определения скорости упругой и полной деформации.

Функция вязкости $V(x)/\eta$ задает в ОС (1) связь напряжения со скоростью вязкопластической компоненты деформации (регулирует чувствительность напряжения к скорости деформации, наследственные свойства и скорость диссипации). Очевидно, чем больше $|V(\sigma)|/\eta$, тем меньше вязкое сопротивление (больше $|\dot\varepsilon_v|$ и $|\dot\varepsilon|$ при том же σ) и тем ближе поведение моделируемого материала к поведению жидкости («кажущаяся вязкость» μ задается обратной к V функцией $W(y)$, точнее, функцией $w=W(y)/y$): $\sigma=W(\eta\dot\varepsilon_v)$ и $\mu(\dot\varepsilon_v):=\sigma/\dot\varepsilon_v=W(\eta\dot\varepsilon_v)/\dot\varepsilon_v=\eta\,w(\eta\dot\varepsilon_v)$).

Минимальные первичные ограничения на $V(x)$ [1]: $V(x)$ – непрерывная (нестрого) возрастающая функция на интервале (ω_-,ω_+), такая, что $V(0)=0$ (тогда $V(x)x\ge0$). Исследование кривых релаксации, ползучести и деформирования, порожденных ОС (1), показывает [1], что следует различать два основных случая, в которых ОС (1) (моделируемый материал) ведет себя по-разному:

1) $|V(x)|>0$ при $x\ne0$,

2) $V(x)\equiv0$ на некотором отрезке $[\sigma_-,\sigma_+]\subset(\omega_-,\omega_+)$, $\sigma_-\le0$, $\sigma_+\ge0$, $\sigma_+\ne\sigma_-$.

Во втором случае при $\sigma\in[\sigma_-,\sigma_+]$ ОС (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала, σ_-, σ_+ – пределы упругости материала при сжатии и растяжении (и пороги ползучести), а при $\sigma>\sigma_+$ (или $\sigma<\sigma_-$) начинают проявляться диссипативные и вязкопластические свойства.

В дальнейшем будет выяснено, какие следствия вытекают из принятых ограничений на МФ, какими общими свойствами кривых ползучести, релаксации и деформирования ОС (1) они управляют, моделирование каких реологических эффектов обеспечивают или запрещают. Сопоставление обнаруженных свойств теоретических кривых ОС (1) с типичными свойствами кривых квазистатических испытаний ползучести широкого класса вязкоупругопластичных материалов приводит к необходимости наложения дополнительных ограничений на МФ

F и V для обеспечения адекватного описания типичных экспериментальных кривых и основных термомеханических эффектов [1].

Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии (у которых совпадают не только диаграммы деформирования и пределы прочности, но и кривые ползучести и релаксации при растяжении и сжатии) $\omega_- = -\omega_+$, и материальные функции должны быть нечетными. Их можно задавать лишь при $x \in (0, \omega_+)$ и продолжать на $(\omega_-, 0)$ по формулам: $F(x) = F(|x|)\,\mathrm{sgn}(x)$, $V(x) = V(|x|)\,\mathrm{sgn}(x)$ (при этом обеспечивается непрерывность производных и потому – единый касательный модуль в нуле, так как $F'(0+0) = F'(0-0)$).

Если материалы при растяжении и сжатии ведут себя не одинаково (это может проявляться лишь в испытаниях на ползучесть [2–5], хотя мгновенные модули и начальные участки диаграмм деформирования одинаковы, например, у титановых и алюминиевых сплавов), нужно «склеивать» МФ из двух ветвей на $(0, \omega_+)$ и $(\omega_-, 0)$. Ниже показано, как их можно определить по семействам кривых ползучести при сжатии и растяжении. Иногда экспериментальные диаграммы деформирования и кривые ползучести разномодульного материала показывают, что достаточно просто ввести множитель $\gamma = E_c / E_t$ (отношение модулей при сжатии и растяжении) в нечетное продолжение функции $F(x)$ на интервал $(\omega_-, 0)$.

Определяющее соотношение (1) можно записать в интегральной и дифференциальной формах:

$$\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1}\int_0^t V(\sigma(\tau))d\tau \qquad (2)$$

$$\text{или } \varepsilon = \mathbf{\Pi}\sigma;$$

$$\dot{\varepsilon} = E^{-1}[F'(\sigma)\dot{\sigma} + \tau_r^{-1}V(\sigma)],\ t > 0. \qquad (3)$$

Возможность применения модели (2) к неизотермическим процессам в данной работе не обсуждается так же, как и распространение одномерного ОС (2) на трехмерный случай. Формальный перенос можно осуществить стандартным способом – путем постулирования пропорциональности девиаторов тензоров напряжений и скоростей деформации (тензорной линейности ОС) и связи вида (2) между их вторыми инвариантами (возможно, с учетом характеристик вида напряженного состояния, включающих первый и третий инварианты тензора напряжений). Конечно, при этом возникает ряд серьезных вопросов (связанных с выбором мер напряжения, деформации, скорости деформации, типа дифференцирования, с термодинамической согласованностью и т.п.), требующих проработки.

Цель данной статьи (как и работы [1]) – выявить возможности и недостатки одномерной модели (2), выяснить, какие одноосные реологические явления она может (не может) описать и для каких классов материалов. Разумно сначала отладить модель в одномерном случае (обнаружить ее недостатки и индикаторы неприменимости, устранить их путем модификаций, минимизировать количество материальных функций и параметров), а затем обобщать на трехмерный случай и верифицировать при сложном напряженном состоянии.

К ОС (2) применена техника качественного анализа определяющих соотношений для вязкоупругопластичных материалов, разработанная ранее автором в цикле работ [1, 6–11] и др. В работе [1] выведены в общем виде (в виде неявных функций, интегралов и рядов, зависящих от параметров) уравнения семейств всех основных кривых одномерного ОС (2), аналитически изучены их качественные свойства в зависимости от МФ F и V при минимальных априорных ограничениях на последние. На основе их сопоставления с набором типичных качественных свойств базовых экспериментальных квазистатических кривых широкого класса вязкоупругопластичных материалов (с целевым списком моделируемых термомеханических эффектов) выведены необходимые феноменологические ограничения на обе МФ, обеспечивающие адекватное описание экспериментальных кривых, выявлены эффекты, которые ОС принципиально не могут описать ни при каких МФ, и эффекты, которые могут быть описаны при определенных дополнительных ограничениях, наложенных на МФ [1].

Данная статья посвящена первому этапу анализа ОС (2) – исследованию порожденных им кривых ползучести (КП) при кусочно-постоянном напряжении (в частности, обратной ползучести). Испытания на ползучесть при ступенчатых нагружениях позволяют обследовать разные аспекты поведения материала и детали реализации многих эффектов, собрать богатую информацию для идентификации и верификации ОС и выявления лучшего из них по сравнению с КП при постоянной нагрузке.

В статье приняты следующие сокращения и обозначения: МФ – материальные функции ОС (1); $(\omega_-;\omega_+)$ – область определения МФ $F(x)$ и $V(x)$; $k:=\eta^{-1}$, $\tau_r=\eta/E=1/(kE)$; КП – кривые ползучести; $\mathrm{h}(t)$ – функция Хевисайда.

Родственные модели: краткий обзор

Общая тензорная формулировка нелинейных ОС максвелловского типа для (больших деформаций) вязкоупругих сред, родственных ОС (2), описание кинематики, термодинамические аспекты и способы конкретизации ОС изучались в работах [12–23]. Поскольку внимание авторов работ [12, 15–17, 19–23] было сосредоточено на описании поведения жидкостей, они обсуждали эксперименты и эффекты, присущие жидкостям (расплавам и растворам полимеров и т.п.), не рассматривали кривые ползучести, релаксации и деформирования, порождаемые ОС (2) и родственными ему, не задавали ОС многих вопросов, специфичных для механики деформируемого твердого тела.

Самый простой и популярный (в теории ползучести, вязкопластичности, реологии полимеров, гидродинамике неньютоновских жидкостей) закон вязкого течения – степенной закон: $\dot\varepsilon_v=\eta^{-1}\sigma^n$ (*Norton – Bailey model*, *Norton viscoplastic law*), т.е. частный случай ОС (2) с $F(x)\equiv 0$, $V(x)=x|x|^{n-1}$, $n>1$. Он описывает зависимость скорости установившейся ползучести от напряжения [5, 27–33], течение степенных жидкостей [34] и используется для моделирования течения материалов в состоянии сверхпластичности [35–39] (наряду с обобщением вида $\sigma(t)=K\dot\varepsilon(t)^m\varepsilon(t)^N$, $m<1$, $N>0$). Условие $n>1$ – критерий псевдопластичности среды [34], т.е. убывания кажущейся вязкости с ростом напряжения. К псевдопластическим средам относятся расплавы и растворы полимеров, мазуты и битумы, кровь и плазма, пищевые и фармацевтические эмульсии, кремы, пасты, мази и т.п. В работе [2] для описания ползучести разносопротивляющихся материалов (титановые сплавы) применен степенной закон с различными значениями коэффициента η для растяжения и сжатия и одинаковым n.

Выбрав $V(x)=x|x|^{n-1}$, $n\ge 1$ в (3), получим модель с одной МФ F и тремя параметрами:

$$\dot\varepsilon=E^{-1}F'(\sigma)\dot\sigma+\eta^{-1}\sigma\,|\,\sigma\,|^{n-1}. \qquad (4)$$

Здесь $E>0$, $\eta>0$ и $n\ge 1$ – показатель, регулирующий вязкость, степень ее нелинейности и чувствительность напряжения к скорости деформации.

Если $n>1$, то при $\sigma\in(0,1)$ будет $\sigma^n<\sigma$, т.е. $V(\sigma)/\eta<\sigma/\eta$ и, следовательно, вязкость моделируемого материала выше вязкости ньютоновской жидкости; чем больше n, тем меньше $V=\sigma^n$, и тем больше вязкость материала. В работе [1] доказано, что показатель скоростной чувствительности

$$m(a,\varepsilon):=\frac{\partial \lg|\,\sigma(\varepsilon,a)\,|}{\partial \lg|\,a\,|}=\sigma^{-1}a\frac{\partial\sigma}{\partial a} \qquad (5)$$

диаграмм деформирования $\sigma(\varepsilon,a)$, порождаемых ОС (4) при $\dot\varepsilon(t)=a=\mathrm{const}$, всегда понижается с ростом n (как и для степенной жидкости, когда $F\equiv 0$, $\sigma=(\eta\dot\varepsilon)^{1/n}$ и $m=n^{-1}$). Показатель (5) играет важную роль в описании сверхпластичности.

Зафиксировав $F(x)=x$ в (4), получим модель с линейной упругостью и степенной вязкостью (будем ее называть полулинейной):

$$\dot\varepsilon=E^{-1}\dot\sigma+\eta^{-1}\sigma\,|\,\sigma\,|^{n-1}. \qquad (6)$$

Она содержит только три материальных параметра. Пожалуй, именно эта модель ближе всего к модели $\sigma(t)=K\dot\varepsilon(t)^m\varepsilon(t)^N$, $N\ge 0$, традиционно используемой для описания сверхпластического течения и ползучести с деформационным упрочнением [3, 36], но теоретические кривые модели (6) лучше и полнее описывают данные испытаний материалов в сверхпластичном и предсверхпластичном состояниях, и сфера ее применимости гораздо шире, чем сверхпластичность [1].

Полулинейная модель (6) применялась в ряде работ для описания экспериментальных кривых ползучести и решения конкретных задач [27, 29, 40–44]. В монографии [36] она использовалась для моделирования сверхпластичности. В статье [43] исследовались кривые ползучести и обратной ползучести параллельного соединения двух полулинейных моделей вида (6) с различными показателями n. В работе [44] использовалась МФ $V=1-e^{\mu x}$.

Однако систематическое исследование в общем виде (для произвольных МФ F,V) свойств всех теоретических квазистатических кривых (релаксации, ползучести и деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях нагружения и деформирования, циклического нагружения и др.), порождаемых ОС (2) (даже при малых деформациях в одноосном случае), и их сравнение с типовыми свойствами экспериментальных кривых отсутствуют в литературе по вязкоупругости, ползучести, реологии и механике полимеров, в частности, в [2–44] и [45–57]. Например, в монографии [29, с. 66] для описания ползучести стержней используется модель со степенной вязкостью и линейной упругостью (6), но ничего не говорится о принципиальных качественных ограничениях: например, о том, что при любом показателе степени n эта модель описывает только релаксацию напряжений к нулю (не может описать кривые релаксации с отличным от нуля предельным значением напряжения при $t \to \infty$ [1]), характерную, прежде всего для класса сред, проявляющих (при больших временах и медленных процессах) свойства жидкостей [58].

Данная статья и работа [1] – попытка восполнить этот пробел, выявить арсенал возможностей ОС (2), индикаторы его (не)применимости, феноменологические ограничения на МФ и способы их идентификации. В этой статье будет предпринята попытка более детального и систематического изучения ОС (2) и порождаемых им теоретических кривых, более точного определения круга реологических явлений и спектра материалов, которые эта модель может описывать. Нелинейное ОС (2) управляется двумя МФ, и потому его арсенал возможностей и область адекватности гораздо шире, чем у классической линейной модели Максвелла и степенного закона течения (управляемых двумя параметрами). ОС (2) может быть нацелено на описание комплекса основных реологических эффектов, типичных для материалов, обладающих наследственностью и высокой чувствительностью к скорости деформирования, имеющих выраженную стадию установившей ползучести, «площадку текучести» на диаграмме деформирования и предел текучести, зависящий от скорости деформирования, материалов, проявляющих (в определенных структурных состояниях и при определенных термомеханических режимах деформирования) свойства как твердого тела, так и жидкости. К таким материалам относятся многие полимеры, их расплавы и растворы, композиты, твердое топливо, асфальтобетон, титановые и алюминиевые сплавы, углеродные и керамические материалы при высоких температурах и др. В частности, ОС (2) (и его модификации) может быть полезно для моделирования поведения материалов, находящихся в режимах сверхпластического деформирования [1].

Базовые свойства определяющего соотношения (2)

Установим некоторые свойства нелинейного оператора $\mathbf{\Pi} : \sigma(t) \mapsto \varepsilon(t)$ из ОС (2), которые вытекают из общих математических ограничений, наложенных на МФ F и V (и подтверждают их необходимость и значимость).

1. Если $\sigma \equiv 0$ при $t < t_*$, то и $\varepsilon \equiv 0$, $t < t_*$ (так как $F(0) = 0$ и $V(0) = 0$). Если $\sigma(t) > 0$ в некоторой правой окрестности точки $t = t_*$ (например, $\sigma(t_* + 0) > 0$), то $\varepsilon(t) > 0$ в этой правой окрестности t_* (ибо $F(x) > 0$, $V(x) \geq 0$ при $x > 0$).

2. Если $\sigma(t) \geq 0$ при $t \in [0, t_*]$, то $\varepsilon(t) \geq 0$ при $t \in [0, t_*]$.

3. Если на некотором интервале $\sigma(t)$ положительна и возрастает, то $\varepsilon(t)$ тоже возрастает на этом интервале (первое слагаемое в (3) положительно, а второе неотрицательно, поскольку $F'(x) > 0$ и $V(x) \geq 0$ при $x > 0$).

4. Оператор $\mathbf{\Pi}$ переводит любую кусочно-непрерывную функцию $\sigma(t)$, $t \in [0, t_*]$, в кусочно-непрерывную функцию $\varepsilon(t)$ с теми же точками разрыва первого рода, непрерывную – в непрерывную, а кусочно-дифференцируемую $\sigma(t)$ – в кусочно-дифференцируемую $\varepsilon(t)$ (к точкам излома $\sigma(t)$ могут добавиться еще точки излома $F(x)$). Интегральное слагаемое в (2) (накопленная «вязкая» составляющая деформации $\varepsilon_v(t)$) – непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция от t для любой кусочно-непрерывной $\sigma(t)$ (ибо $V(x)$ непрерывна).

5. Наложенные на МФ ОС (2) первичные ограничения обеспечивают термодинамическую согласованность модели, т.е. положительность работы напряжений в любом процессе деформирования и неотрицательность диссипации (соблюдение диссипативного неравенства). Действительно, работа напряжений $\sigma(\tau)$ в процессе деформирования $\varepsilon(\tau)$, связанном с $\sigma(\tau)$ соотношением (3), выражается формулой:

$$A = \int_0^t \sigma(\tau)\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau = \int_0^t E^{-1}\sigma F'(\sigma)\,\dot{\sigma}\,d\tau + \int_0^t k\,V(\sigma)\sigma\,d\tau = W_1 + W_2, \qquad (7)$$

где $W_1 := E^{-1}\int_0^{\sigma} xF'(x)\,dx = W_1(\sigma)$,

$W_2 := \eta^{-1}\int_0^t \sigma(\tau)V(\sigma(\tau))d\tau = W_2(t)$ – энергия упругой деформации и диссипация соответственно.

Энергия $W_1(\sigma)$ положительна и возрастает при $\sigma \neq 0$ в силу ограничения $F'(x) > 0$ ($W_1'(\sigma) = E^{-1}\sigma F'(\sigma) > 0$ при $\sigma > 0$). Скорость диссипации выражается формулой $\dot{W}_2(t) = \eta^{-1}\sigma(\tau)V(\sigma(\tau))$. В силу непрерывности МФ $V(x)$ и ограничения $xV(x) \geq 0$ при $x \neq 0$ справедливы неравенства $\dot{W}_2(t) \geq 0$ и $W_2(t) \geq 0$ при всех $t > 0$. Равенство $W_2(t_*) = 0$ возможно лишь в случае, когда $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$, $\sigma_- \leq 0$, $\sigma_+ \geq 0$, $\sigma_+ \neq \sigma_-$, и $\sigma(\tau) \in [\sigma_-, \sigma_+]$ для всех $\tau < t_*$ (т.е. модуль напряжения не превышает пределов упругости).

Энергия деформации $W_1(\sigma)$ не зависит от процесса, а лишь от конечного состояния, характеризуемого значением σ (или величиной упругой деформации $\varepsilon_e = F(\sigma)/E$). Заменой переменной $z = F(\sigma)/E$ $W_1(\sigma)$ преобразуется к виду

$$W_1(\sigma) = \int_0^{F(\sigma)/E} f(Ez)\,dz,$$

где $f = F^{-1}$ – обратная функция.

В работе [1] доказано, что $\sigma = f(E\varepsilon)$ – уравнение кривой мгновенного деформирования ОС (2), т.е. $f(E\varepsilon)$ – предельная функция, к которой сходится семейство диаграмм деформирования $\sigma(\varepsilon, a)$ ОС (2) с постоянными скоростями деформирования $\dot{\varepsilon} = a$ при $a \to \pm\infty$ и семейство диаграмм деформирования $\sigma(\varepsilon, b)$ с постоянными скоростями нагружения $\dot{\sigma} = b$ при $b \to \pm\infty$.

6. Оператор $\mathbf{\Pi}$ *монотонен*: если $\sigma_2(t) \geq \sigma_1(t)$ при $t < t_*$, то $\varepsilon_2(t) \geq \varepsilon_1(t)$ при $t < t_*$. В самом деле, поскольку МФ возрастают, то $F(\sigma_2(t)) \geq F(\sigma_1(t))$ и $V(\sigma_2(t)) \geq V(\sigma_1(t))$, и, значит, при любом $t < t_*$ оба слагаемых в (2) будут больше для второго процесса.

7. Оператор $\mathbf{\Pi}$ *коммутирует с операторами сдвига по времени* $\mathbf{T}_{t_0}: y(t) \mapsto y(t - t_0)$: для любого $t_0 > 0$ $\mathbf{\Pi T}_{t_0} = \mathbf{T}_{t_0}\mathbf{\Pi}$ на множестве кусочно-непрерывных функций $y(t)$, таких, что $y(t) = 0$ при $t < 0$. Другими словами, оператор $\mathbf{\Pi}$ инвариантен относительно полугруппы сдвигов по времени: если $\varepsilon(t) = \mathbf{\Pi}\sigma(t)$, то $\mathbf{\Pi}(\sigma(t - t_0)) = \varepsilon(t - t_0)$. Это доказывается заменой $u = \tau - t_0$ в интеграле (2), записанном для $\tilde{\sigma}(t) := \sigma(t - t_0)$.

8. Оператор $\mathbf{\Pi}$ *аддитивен для процессов с дизъюнктными носителями*: если $\sigma_i(t) \equiv 0$ при $t \in \mathbf{R}_+ \setminus A_i$, A_i – попарно непересекающиеся множества, то $\mathbf{\Pi}\left(\Sigma\sigma_i(t)\right) = \Sigma\mathbf{\Pi}\sigma_i(t)$ (сумма может быть счетной). Этим свойством обладают оба оператора-слагаемых в (2). Оно полезно при определении отклика на ступенчатую программу нагружения и другие кусочно-непрерывные процессы.

9. Скачок напряжения в некоторый момент $t = t_*$ вызывает, согласно ОС (1), скачки деформации и ее скорости. Интегральное слагаемое в (2) сохраняет непрерывность даже в точке разрыва $\sigma(t)$, и потому скачок деформации обеспечивается только первым (упругим) слагаемым:

$$\Delta\varepsilon = \left(F(\sigma_2) - F(\sigma_1)\right)/E \tag{8}$$

(индексами 1 и 2 помечены пределы функций слева и справа в точке $t = t_*$).

Скачок $\dot{\varepsilon}(t)$ в момент $t = t_*$ найдем предельными переходами в (3):

$$\dot{\varepsilon}_1 = E^{-1}F'(\sigma_1)\dot{\sigma}_1 + kV(\sigma_1),$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = E^{-1}F'(\sigma_2)\dot{\sigma}_2 + kV(\sigma_2);$$

$$\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 = E^{-1}\left(F'(\sigma_2)\dot{\sigma}_2 - F'(\sigma_1)\dot{\sigma}_1\right) +$$

$$+k\left(V(\sigma_2) - V(\sigma_1)\right). \tag{9}$$

Для кусочно-постоянной программы нагружения $\dot{\sigma}_i = 0$, следовательно, формулы упрощаются:

$$\dot{\varepsilon}_1 = kV(\sigma_1),\ \dot{\varepsilon}_2 = kV(\sigma_2);$$

$$\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 = k\left(V(\sigma_2) - V(\sigma_1)\right),$$

$$\dot{\varepsilon}_2 / \dot{\varepsilon}_1 = V(\sigma_2)/V(\sigma_1). \tag{10}$$

Формулы (8) и (10) подсказывают способ идентификации ОС (1) по испытанию (одному или нескольким) материала с кусочно-постоянной программой нагружения (на ступенчатую ползучесть): m ступеней нагружения позволят определить значения обеих МФ в m точках σ_i (если, конечно, удастся с достаточной достоверностью определить по зарегистрированному в эксперименте отклику $\varepsilon(t)$ величины скачков $\varepsilon(t)$ и $\dot{\varepsilon}(t)$).

10. Если разрыв первого рода есть только у производной $\dot{\sigma}(t)$, а $\sigma(t)$ непрерывна в точке $t = t_*$, то $\varepsilon(t)$ непрерывна, а $\dot{\varepsilon}(t)$ имеет скачок: из (9) при $\sigma_i = \sigma_* := \sigma(t_*)$ имеем

$$\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 = E^{-1}\left(F'(\sigma_* + 0)\dot{\sigma}_2 - F'(\sigma_* - 0)\dot{\sigma}_1\right).$$

Величина скачка в этом случае не зависит от МФ V (скорость вязких деформаций $\dot{\varepsilon}_v = kV(\sigma)$ остается непрерывной). Если $F'(x)$ непрерывна в точке $x = \sigma_*$, то скачки $\dot{\varepsilon}(t)$ и $\dot{\sigma}(t)$ пропорциональны: $\hat{\dot{\varepsilon}}(t_*) = E^{-1}F'(\sigma_*)\hat{\dot{\sigma}}(t_*)$ (при фиксированном σ_*). Конечно, излом МФ $F(x)$ в некоторой точке $x = x_*$ вызовет скачок $\dot{\varepsilon}(t)$ даже для любого гладкого процесса $\sigma(t)$, для которого уравнение $\sigma(t) = x_*$ имеет решение: если t_* – корень, то $\hat{\dot{\varepsilon}}(t_*) = E^{-1}\dot{\sigma}(t_*)\hat{F}'(x_*)$.

Аналогично, если программа деформирования $\varepsilon(t)$ непрерывна, а $\dot{\varepsilon}(t)$ имеет разрыв первого рода в точке $t = t_*$, то $\sigma(t)$ непрерывна, а $\dot{\sigma}(t)$ имеет скачок:

$$\dot{\sigma}_i = E\left(\dot{\varepsilon}_i - kV(\sigma_*)\right)/F'(\sigma_*),$$

$$\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1 = E\left(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1\right)/F'(\sigma_*).$$

От противного: если бы был скачок $\Delta\sigma \neq 0$, то в силу (2) был бы ненулевой скачок $\Delta\varepsilon = \left(F(\sigma_2) - F(\sigma_1)\right)/E$. Это свойство полезно при исследовании диаграмм деформирования с кусочно-постоянной скоростью деформирования.

11. Условие псевдопластичности среды [34], т.е. условие убывания кажущейся вязкости $\sigma/\dot{\varepsilon}_v$ с ростом напряжения (или скорости деформации), налагает дополнительное ограничение на МФ ОС (2). «Кажущаяся вязкость» задается обратной к V функцией $v(y)$:

$$\mu(\dot{\varepsilon}_v) := \sigma/\dot{\varepsilon}_v = v(\eta\dot{\varepsilon}_v)/\dot{\varepsilon}_v = \eta\, w(\eta\dot{\varepsilon}_v),$$

где $w = v(y)/y$, $\eta > 0$. Убывание $\mu(\dot{\varepsilon}_v)$ равносильно убыванию $w(y)$: $w' = y^{-2}[yv' - v] < 0$, $yv' < v$. Заменой переменной $y = V(x)$ (с учетом $V'(x) > 0$) условие псевдопластичности приводится к виду $V(x)V'(x)^{-1} < x$, или $V(x) < xV'(x)$. Для $V = Ax^n$ это условие дает $n > 1$. Если $V(x) = xV'(x)$, то есть $V(x) = cx$, то $\mu(\dot{\varepsilon}_v) = \mathrm{const}$, и получаем ньютоновскую жидкость.

Свойства кривых ползучести

При $\sigma(t) = \bar{\sigma} = \mathrm{const}$, $t > 0$, из (2) получается уравнение семейства КП:

$$\varepsilon(t,\bar{\sigma}) = E^{-1}[V(\bar{\sigma})\tau_r^{-1}t + F(\bar{\sigma})], \quad (11)$$

где $\tau_r := \eta/E$ – время релаксации линейной модели Максвелла.

Если $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+]$, $\sigma_- < 0$, $\sigma_+ > 0$, то при $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$ ОС (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала, и при $\bar{\sigma} \in [\sigma_-, \sigma_+]$ ползучесть отсутствует (пределы упругости на сжатие и растяжение совпадают с пределами ползучести).

Если $V(\bar{\sigma}) \neq 0$, то все КП линейны по времени при $t > 0$, т.е. при любых МФ ОС (2) моделирует только ползучесть с постоянной скоростью (как и линейная модель Максвелла), ОС (2) не способно описывать стадии замедленной и ускоренной ползучести, а также – ограниченную ползучесть (свойственную, например, многим полимерам). Поскольку $V(\bar{\sigma}) > 0$ при $\bar{\sigma} > 0$ и возрастает, КП (11) $\varepsilon(t,\bar{\sigma})$ возрастает по t (при $\bar{\sigma} > 0$) и по $\bar{\sigma}$, что совпадает с типичными качественными свойствами экспериментальных КП структурно стабильных однородных материалов. Скорость диссипации при ползучести постоянна:

$$\dot{W}_2(t) = k\sigma(\tau)V(\sigma(\tau)) = k\bar{\sigma}V(\bar{\sigma}) > 0.$$

В силу уравнения (11) зависимость скорости установившейся ползучести от напряжения полностью определяется МФ $kV(x)$: $\dot{\varepsilon}(t) = kV(\bar{\sigma})$. Материальную функцию $V(x)$ можно, в принципе, найти по произвольной экспериментальной зависимости $\dot{\varepsilon} = r(\bar{\sigma})$ или по выбранной ее аппроксимации (степенной, экспоненциальной, дробно-линейной или дробно-степенной с вертикальной асимптотой [59]).

Поскольку в испытаниях стабильных материалов зависимость скорости установившейся ползучести $\dot{\varepsilon} = r(\bar{\sigma})$ от напряжения всегда является возрастающей и выпуклой вниз [5, 28] при $\bar{\sigma} > 0$, то на $V(x)$ *необходимо наложить дополнительное ограничение: $V(x)$ должна быть (нестрого) выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вверх при $x < 0$* (т.е. $V''(x)x \geq 0$, если $V''(x)$ существует).

Выраженная стадия ползучести с постоянной скоростью характерна для многих пластичных металлов, полимеров в вязкотекучем состоянии и для материалов в состоянии сверхпластичности (высокому показателю скоростной чувствительности при сверхпластическом деформировании соответствуют величины показателя $n \leq 3$, в отличие от металлов в обычном состоянии, у которых всегда $n \in (3;10)$ или более). Экспериментальные КП полимеров имеют стадию установившейся ползучести лишь при достаточно высоких температурах, когда полимер находится в вязкотекучем состоянии [45–48, 54–57].

Кривые обратной ползучести, отсутствие затухания памяти

Кривые обратной ползучести (КОП) – отклики на прямоугольный импульс нагрузки $\sigma(t) = \bar{\sigma}[\mathrm{h}(t) - \mathrm{h}(t - t_s)]$, т.е. $\sigma(t) = \bar{\sigma}$ при $t \in (0; t_s)$, $\sigma(t) = 0$ при $t > t_s$, где $t_s, \bar{\sigma} > 0$. Подстановка в (2) дает КОП

$$\varepsilon(t) = E^{-1}[V(\bar{\sigma})\tau_r^{-1}t + F(\bar{\sigma})] \text{ при } t < t_s,$$
$$\varepsilon(t) = kV(\bar{\sigma})t_s = E^{-1}V(\bar{\sigma})\, t_s\tau_r^{-1} \text{ при } t > t_s \quad (12)$$

(при $t > t_s$ первое слагаемое в (2) равно нулю, а интегральное слагаемое принимает постоянное значение $kV(\bar{\sigma})t_s$, так как постулировано $F(0)=0$ и $V(0)=0$). Скачок деформации в точке $t = t_s$ равен $-F(\bar{\sigma})/E$, при $t > t_s$ деформация становится постоянной и равной накопленной за время t_s деформации ползучести. При полной разгрузке исчезает только начальная (мгновенная) упругая деформация $\varepsilon(+0) = F(\bar{\sigma})/E$, а вся накопленная деформация ползучести оказывается необратимой, пластической (как и у линейной модели Максвелла). Именно такое поведение демонстрируют многие металлы при высоких температурах.

На рисунке 1 приведены КОП (12) полулинейной модели (6) с $E=100$, $\eta=100$ ($\tau_r=1$) и $n=2$ ($V(x)=x^2\operatorname{sgn}x$) для $\bar{\sigma}=1$, $t_s=5$ (кривая 1) и $t_s=10$ (кривая 2). Вдоль оси абсцисс отложено безразмерное время, рассматриваемые качественные свойства кривых не зависят от его масштабирования.

Таким образом, модель (1) не описывает «обратную ползучесть» («упругое последействие»), т.е. процесс постепенной релаксации накопленной деформации с выходом на некоторый постоянный уровень при больших значениях времени, как это наблюдается в испытаниях многих полимеров (например, для сетчатых полимеров и для костной ткани КОП стремится к асимптоте $\varepsilon=0$). «Высокоэластичная» компонента деформации, обеспечивающая постепенность убывания, полностью отсутствует в модели (1).

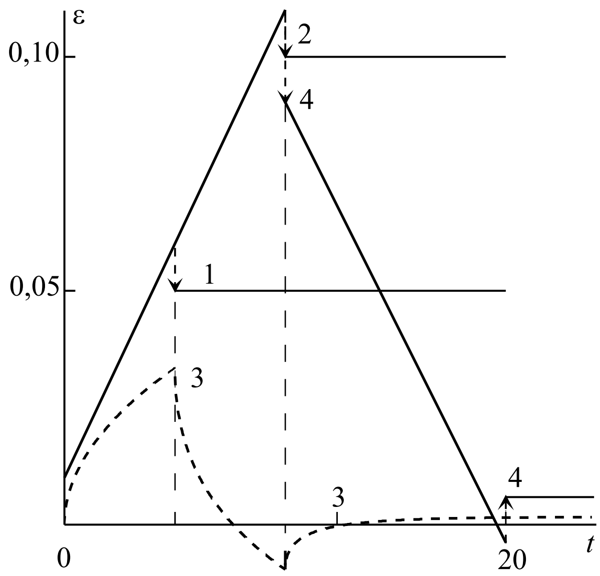

Рис. 1. Кривые обратной ползучести (12) и эффект Кольрауша для полулинейной модели (6) с $\tau_r = 1$ и $V(x) = x|x|$:
1 – КОП для $t_s = 5$; 2 – КОП для $t_s = 10$; 3 – типичная для вязкоупругих материалов кривая ползучести с эффектом Кольрауша; 4 – эффект Кольрауша, воспроизводимый моделью (6)

В силу (12) след (деформация), оставленный финитным импульсом нагрузки, не стирается никогда. Очевидно, *память модели (1) не затухающая*, а весьма «крепкая», «перманентная» («permanent-memory»). Такая «злопамятность» и неспособность описывать материалы с затухающей памятью – недостаток ОС (1), сильно сужающий круг моделируемых материалов и процессов. Впрочем, неспособность модели (1) описывать упругое восстановление и затухание памяти можно устранить, например, присоединив к ней параллельно упругий элемент, либо прямым введением дополнительного ядра (весового множителя) в интеграл (2) (как это сделано в ОС, построенных в работах [6, 7]).

Однако такое поведение модели (1) свидетельствует о том, что она, возможно, способна описывать не только вязкоупругость, но и вязкопластичность. В работе [1] эта гипотеза подтверждена наличием на диаграмме деформирования модели (1) при постоянной скорости деформации участков вязкопластического течения с практически постоянным напряжением (без последующего упрочнения – как это наблюдается у материалов в состоянии сверхпластичности: см., например, работы [35, 36]). Для материалов в состоянии сверхпластичности характерна как раз ползучесть с постоянной скоростью, что и дает уравнение (11).

Свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях

Рассмотрим программу нагружения из N ступеней:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i [\mathrm{h}(t-t_{i-1}) - \mathrm{h}(t-t_i)] + \\ +\sigma_N \mathrm{h}(t-t_{N-1}) \qquad (13)$$

с произвольными $\sigma_i \in (\omega_-, \omega_+)$ и $t_i > 0$ ($t_0 = 0$, $t_i > t_{i-1}$ и $\sigma(t) = \sigma_N$ при $t > t_{N-1}$). Поскольку оператор $\mathbf{\Pi}$ в ОС (2) аддитивен для процессов с дизъюнктными носителями и инвариантен относительно сдвигов по времени, он переводит процесс (13) в сумму откликов на каждую ступень σ_i, получающихся из кривой обратной ползучести (12) сдвигами по времени на t_{i-1}:

$$\varepsilon(t)=\sum_{i=1}^{N-1} S(t-t_{i-1};t_i-t_{i-1},\sigma_i)+$$
$$+E^{-1}[V(\sigma_N)\tau_r^{-1}(t-t_{N-1})+F(\sigma_N)]\,\mathrm{h}(t-t_{N-1}) \ ,$$
$$S(t;t_s,\bar\sigma):=E^{-1}[V(\bar\sigma)\,\tau_r^{-1}t+F(\bar\sigma)]\times$$
$$\times[\mathrm{h}(t)-\mathrm{h}(t-t_s)]+E^{-1}V(\bar\sigma)\,t_s\tau_r^{-1}\,\mathrm{h}(t-t_s) \ ,$$

где $S(t;t_s,\bar\sigma)$ – отклик на прямоугольный импульс напряжения $\bar\sigma$ с носителем $[0;t_s]$ (задающий кривую обратной ползучести (12)).

Поскольку все слагаемые кусочно линейны, $\varepsilon(t)$ кусочно линейна и имеет на интервалах $t\in(t_{i-1};t_i)$, $i=1,\dots,N$ вид

$$\varepsilon(t)=E^{-1}[V(\sigma_i)\tau_r^{-1}(t-t_{i-1})+F(\sigma_i)]+p_{i-1}, \quad (14)$$

$$p_{i-1}:=E^{-1}\tau_r^{-1}\sum_{m=1}^{i-1}V(\sigma_m)(t_m-t_{m-1}) . \quad (15)$$

Накопленная пластическая деформация (15) выражает влияние предыдущих $(i-1)$ ступеней нагружения ($p_0:=0$). Скачки деформации в точках $t=t_i$, порожденные скачками напряжения $\sigma_{i+1}-\sigma_i$, равны $[F(\sigma_{i+1})-F(\sigma_i)]/E$, скачки скорости ползучести $\dot\varepsilon(t)$ равны $kV(\sigma_{i+1})-kV(\sigma_i)$, $k:=\eta^{-1}=E^{-1}\tau_r^{-1}$. Скорость диссипации постоянна на каждом интервале $(t_{i-1};t_i)$: $\dot W_2(t)=k\sigma_i\,V(\sigma_i)>0$.

Согласно (14) и (15), МФ F не влияет на скорость ползучести (и диссипации), ее скачки и пластическую деформацию p_{i-1}, а МФ V не влияет на мгновенную деформацию $\varepsilon(0+)=F(\sigma_1)/E$ и величины скачков деформации $[F(\sigma_{i+1})-F(\sigma_i)]/E$. Это позволяет определить МФ $kV(x)$ и $F(x)/E$ по отдельности (полностью идентифицировать ОС (2)) по нескольким экспериментальным КП с разными уровнями напряжения или по одной КП, соответствующей кусочно-постоянной программе нагружения. Естественно, это можно делать лишь при условии, что экспериментальные КП линейны по времени и потому могут быть аппроксимированы КП вида (11) (или КП вида (14) при ступенчатом нагружении).

При перестановке ступеней нагружения (например, первой и второй) величины p_i с бóльшими номерами не меняются, и потому на интервалах $t\in(t_{i-1};t_i)$ с $i\ge 3$ КП (14) не меняется, т.е. ОС (2) обладает свойством коммутативности при ступенчатом нагружении [26; 27, с. 217; 9].

Отклонение КП (14) при $t>t_{N-1}$ от обычной кривой ползучести при мгновенном нагружении $\sigma(t)=\sigma_N\,\mathrm{h}(t-t_{N-1})$ в момент $t=t_{N-1}$ (с нулевой предысторией) равно постоянной p_{N-1} (см. (15)). В общем случае $p_{N-1}\ne 0$, следовательно, ОС (2) не обладает свойством затухающей памяти. Так как $V(x)$ не убывает, то верна оценка $kV(\sigma_{\min})t_{N-1}\le p_{N-1}\le kV(\sigma_{\max})t_{N-1}$. Если все $\sigma_i>0$ (и $V(\sigma_{\max})>0$), то и $p_{N-1}>0$.

Если $\sigma_N=0$ (полная разгрузка при $t>t_{n-1}$), то $\varepsilon(t)=p_{N-1}=\mathrm{const}$ при $t>t_{N-1}$, где p_{N-1} – остаточная деформация после $(N-1)$ ступеней нагружения.

Определяющее соотношение (2) способно моделировать эффект Кольрауша. Он наблюдается у полимеров при трехступенчатых программах нагружения с $\sigma_1>0$, $\sigma_2<0$, $\sigma_3=0$ [47]: при определенных соотношениях между напряжениями и длительностями их действия t_1 и t_2-t_1 после снятия напряжения $\sigma_2<0$, вызывающего отрицательную деформацию, наблюдаются кратковременное нарастание и смена знака деформации с «-» на «+» (на рис. 1 штриховая линия 3 – типичная КП с эффектом Кольрауша линейного ОС вязкоупругости со степенной ФП для $t_1=5$, $t_2=10$).

Так как для программы нагружения с $N=3$ и $\sigma_3=0$ из (14) следует, что $\varepsilon(t)=p_2$ при $t>t_2$, то ОС (2) воспроизводит эффект Кольрауша тогда и только тогда, когда выполнена система неравенств $\varepsilon(t_2-0)<0$, $p_2>0$, т.е.

$$0<V(\sigma_2)(t_2-t_1)+V(\sigma_1)t_1<-\tau_rF(\sigma_2) . \quad (16)$$

Определяющее соотношение (2) может моделировать только вырожденный эффект Кольрауша: смена знака деформации происходит за счет скачка в точке $t=t_2$, а не при $t>t_2$ с плавным нарастанием $\varepsilon(t)$ в правой окрестности $t=t_2$. Это иллюстрирует КП 4 на рис. 1: КП полулинейной модели (6) с $E=100$, $\eta=100$ ($\tau_r=1$) и $n=2$ для программы нагружения с $t_1=10$, $t_2=20$, $\sigma_1=1$, $\sigma_2=-0{,}97$, $\sigma_3=0$.

Если МФ $V(x)$ нечетна, а $\sigma_2=-\sigma_1$, то (16) превращается в $0<V(\sigma_1)(2t_1-t_2)<-\tau_rF(\sigma_2)$, и для воспроизведения эффекта Кольрауша необходимо условие $t_1>t_2-t_1$. Если дополнительно задано $V(x)\equiv F(x)$, то для таких моделей с одной МФ критерий (16) превращается в неравенство $0<2t_1-t_2<\tau_r$ и не зависит от конкретного вида МФ и величин σ_i.

Накопление пластической деформации при циклическом нагружении

При периодическом ступенчатом нагружении с двумя ступенями равной длительности $0,5\tau$ в цикле ($t_{i+1}-t_i=t_1=0,5\tau$, $\sigma_{2i+1}=\sigma_1$, $\sigma_{2i}=\sigma_2$, $i=1,...$) на интервалах $t\in(t_{i-1};t_i)$ справедливы формулы (14), (15), а приращение пластической деформации за j-й цикл выражается формулой

$$p_{2j}-p_{2(j-1)}=0,5\tau k[V(\sigma_{2j-1})+V(\sigma_{2j-2})]=$$

$$=0,5\tau k[V(\sigma_1)+V(\sigma_2)]. \qquad (17)$$

В случае $V(x)\neq 0$ при $x\neq 0$ несимметричное циклическое нагружение (с $\sigma_2\neq-\sigma_1$) всегда вызывает *неограниченное* нарастание модуля пластической деформации («ratcheting») с постоянной скоростью (17) за цикл, за исключением специальных программ, когда $V(\sigma_2)=-V(\sigma_1)$. Если МФ $V(x)$ нечетна, то любое количество симметричных циклов нагружения ($\sigma_2=-\sigma_1$) дает нулевую пластическую деформацию, а КП (14) – периодическая функция. Если же диссипативные свойства материала и скорости ползучести при растяжении и сжатии не одинаковы ($V(x)$ не нечетна), то рэтчетинг происходит и при $\sigma_2=-\sigma_1$.

Если же $V(x)\equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-,\sigma_+]$, $\sigma_-\le 0$, $\sigma_+\ge 0$, то при $\sigma\in[\sigma_-,\sigma_+]$ моделируется упругое поведение материала, и потому ползучесть и пластическая деформация отсутствуют, если $\sigma_-\le\sigma_i\le\sigma_+$, $i=1;2$. Если же $\sigma_1>\sigma_+$ или $\sigma_2<\sigma_-$ (и $V(\sigma_1)+V(\sigma_2)\neq 0$), то справедливо все сказанное про рэтчетинг в случае $V(x)\neq 0$.

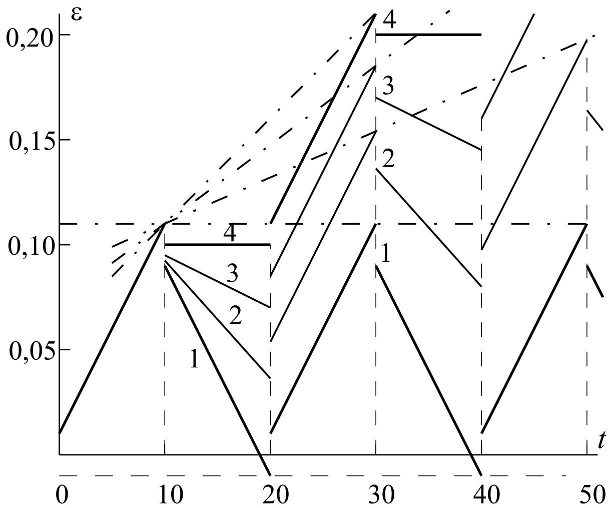

Рис. 2. Кривые ползучести полулинейной модели (6) с $\tau_r = 1$ и $V(x) = x|x|$ при циклическом ступенчатом нагружении с периодом $\tau = 20$, $\sigma = 1$ и различными отношениями σ_2 / σ_1:
$1 - \sigma_2/\sigma_1 = -1$; $2 - \sigma_2/\sigma_1 = -0,75$;
$3 - \sigma_2/\sigma_1 = -0,5$; $4 - \sigma_2/\sigma_1 = 0$

Из формулы (17) следует, что для любых МФ прирост пластической деформации за фиксированное время Δt не зависит от частоты (периода τ) цикла нагружения с заданными амплитудами σ_1, σ_2: если $N_1\tau_1=N_2\tau_2=\Delta t$, то $p(\Delta t)=0,5k\Delta t[V(\sigma_1)+V(\sigma_2)]$.

На рисунке 2 приведены КП (14) полулинейной модели (6) с $E=100$, $\eta=100$ ($\tau_r=1$) и нечетной МФ $V(x)=x|x|$ для четырех программ периодического ступенчатого нагружения с полупериодом $0,5\tau=10$, $\sigma_1=1$ и различными отношениями $\sigma_2/\sigma_1=-1;\,-0,75;\,-0,5;\,0$.

В случае симметричного цикла (кривая 1 для $\sigma_2/\sigma_1=-1$) максимумы и минимумы КП лежат на горизонтальных прямых, рэтчетинга нет, и КП – периодическая функция. При $\sigma_2/\sigma_1>-1$ происходит нарастание положительной пластической деформации (кривые 2–4), максимумы КП лежат на прямых с положительным углом наклона (штрихпунктирные прямые), который возрастает с ростом σ_2. При $\sigma_2=0$ (импульсный цикл) четные участки КП горизонтальны (кривая 4), и приращение деформации за один цикл равно $0,5\tau kV(\sigma_1)$=0,1%.

О зависимости от температуры материальных параметров ОС (2) и моделировании базовых термомеханических эффектов

Материальные параметры ОС (1), (2) зависят от температуры T: $E=E(T)$ и $\eta=\eta(T)$ (удобное описание зависимости от T – одна из причин выделения скалярных множителей E и η из МФ F и V). В работе [1] доказано: для того, чтобы теоретические кривые релаксации, ползучести и деформирования ОС (2) вели себя при изменении температуры так же, как и экспериментальные кривые изотермических испытаний большинства стабильных вязкоупругопластичных материалов (в которых не происходят химические, фазовые и структурные превращения), *необходимо, чтобы E и η, а также $\tau_r=\eta/E$, были убывающими функциями T* (или гомологической температуры). Тогда с ростом T кривые ползучести ОС (2) с $\sigma>0$ смещаются вверх, кривые релаксации, диаграммы деформирования $\sigma=\sigma(\varepsilon,a)$ и $\sigma(\varepsilon,b)$, $\varepsilon>0$, при постоянных скоростях деформации $\dot\varepsilon=a$ или нагружения $\dot\sigma=b$, –

вниз, а показатель скоростной чувствительности $m = m(a, \varepsilon)$ возрастает по a [1], т.е. ОС (2) обеспечивает возрастание податливости и скоростной чувствительности с увеличением температуры.

Например, в испытаниях большинства материалов наблюдается смещение вверх КП с ростом температуры и увеличение скоростей ползучести и релаксации. Увеличение теоретической скорости ползучести $\dot{\varepsilon}(t) = V(\bar{\sigma})/\eta$ и смещение вверх КП (11) и (14) с ростом температуры обеспечивается тем, что коэффициент вязкости $\eta(T)$ – убывающая функция. Тогда накопленная пластическая деформация (15) возрастает с ростом температуры, а рэтчетинг при циклических нагружениях ускоряется в силу (17). Кроме того, смещение вверх начального значения КП (11) обеспечивается убыванием $E(T)$; тогда возрастает и чувствительность КП (14) к скачкам напряжения с ростом температуры.

В работе [1] доказано, что кривые релаксации $\sigma(t; \bar{\varepsilon})$ ОС (2) удовлетворяют дифференциальному уравнению $\dot{\sigma} = -\tau_r^{-1} g(\sigma)$, где $g(x) := V(x)/F'(x)$, т.е. модуль скорости релаксации пропорционален параметру τ_r^{-1}. С ростом температуры теоретические кривые релаксации должны быстрее сближаться с осью $\sigma = 0$ (как экспериментальные кривые), потому функция $\tau_r(T) = \eta / E$ должна убывать, т.е. коэффициент вязкости должен убывать быстрее модуля упругости:

$E(T)\eta'(T) - E'(T)\eta(T) < 0$ или

$E'(T)/E(T) > \eta'(T)/\eta(T)$.

Это свойство наблюдается в испытаниях большинства материалов, например, полимеров: в стекловидном и высокоэластичном состояниях их вязкость зависит от T значительно сильнее, чем модуль Юнга [14, 35, 45–49]. Из убывания $\tau_r(T)$ и критерия воспроизведения эффекта Кольрауша (16) следует, что область, заданная неравенством (16) в пространстве параметров $(t_1, t_2, \sigma_1, \sigma_2)$, сужается с ростом T.

Для обеспечения убывания материальных функций $E(T)$, $\eta(T)$ и $\tau_r(T)$ можно, например, задать их в виде $E = E_0 \exp(u/T)$, $\eta = \eta_0 \exp(v/T)$ с $v > u > 0$. Тогда по (11) скорость ползучести $\dot{\varepsilon}(t) = V(\bar{\sigma})/\eta = \eta_0 \exp(-v/T) V(\bar{\sigma})$ будет возрастать по T, а время релаксации $\tau_r(T) = \exp((v-u)/T)$ будет убывать. Именно в такой форме обычно принимают их зависимость от температуры в работах по ползучести и длительной прочности (по аналогии с законом Аррениуса для кинетических процессов).

В ОС (4) (в частности, в (6)) показатель n тоже может быть функцией температуры. В работе [1] показано, что функция $n(T)$ должна быть (нестрого) убывающей. Тогда показатель скоростной чувствительности (5) диаграмм деформирования ОС (4) с постоянными скоростями $\dot{\varepsilon} = a$ возрастает с ростом T.

Заключение

Установлен ряд общих свойств определяющего соотношения (1) при минимальных ограничениях на две материальные функции (МФ), в частности, монотонность интегрального оператора (2), его инвариантность относительно сдвигов по времени, положительность работы напряжений $\sigma(\tau)$ и неотрицательность диссипации в любом процессе деформирования, отсутствие затухания памяти. Выведены зависимости между скачками $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$, $\dot{\varepsilon}(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ в произвольный момент времени, формулы для скорости диссипации и энергии упругой деформации. Материальная функция $F(x)$ управляет (нелинейно) упругими свойствами (и мгновенными реакциями модели), МФ $V(x)$ – вязкопластическими: она регулирует наследственные свойства, вязкость, скорость диссипации, чувствительность напряжения к скорости деформации, зависимость скорости ползучести и релаксации от величины и знака напряжения, величину и скорость накопления необратимой деформации.

Исследованы свойства кривых ползучести ОС (1) при произвольных ступенчатых нагружениях, их зависимость от параметров программы нагружения и характеристик двух МФ. Показано, что кривые ползучести кусочно линейны и скорость ползучести на каждом участке определяется только МФ V и значением напряжения, а скачки кривых – МФ F. Найден критерий описания эффекта Кольрауша. Выведена формула для пластической деформации при ступенчатых нагружениях, показано, что она не зависит от порядка приложения ступеней нагрузки, а ОС (1) обладает свойством коммутативности при ползучести. Вычислена скорость накопления пластической деформации при циклических ступенчатых нагружениях, доказано, что пластическая деформация нарастает неограниченно (всегда имеет место рэтчетинг), за исключением случая симметричного цикла нагружения материала с одинаковыми диссипативными свойствами на растяжение и сжатие (с нечетной МФ V).

Установлен качественный характер зависимости материальных параметров ОС (1), (2) от температуры, необходимый для описания типичных результатов изотермических испытаний стабильных вязкоупругопластичных материалов на ползучесть, релаксацию и усталость: функции $E(T)$, $\eta(T)$ и $\tau_r(T)$ должны убывать.

Список литературы

1. *Хохлов А.В.* Нелинейные модели вязкоупругости типа Максвелла. Особенности их поведения, скоростная чувствительность и возможность использования для описания ползучести и сверхпластичности материалов. Отчет о НИР № 5193. НИИ механики МГУ им. Ломоносова. 2013. – 108 с.
2. *Никитенко А.Ф.* О влиянии третьего инварианта девиатора напряжений на ползучесть неупрочняющихся материалов // ПМТФ. 1969. № 5. С.102–103.
3. О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие / *А.Ф. Никитенко, О.В. Соснин, Н.Г. Торшенов, И.К. Шокало* // ПМТФ. 1971. № 2. С. 118–122.
4. *Горев Б.В., Рубанов В.В., Соснин О.В.* О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // ПМТФ. 1979. № 5. С. 121–128.
5. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. – 504 с.
6. *Хохлов А.В.* Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // Известия РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 147–166.
7. *Хохлов А.В.* Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // Известия РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 140–60.
8. *Хохлов А.В.* Характерные особенности семейств кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Вып. 77. № 2. С. 139–154.
9. *Хохлов А.В.* Асимптотическая коммутативность кривых ползучести при ступенчатом нагружении в линейной теории наследственности // Машиностроение и инженерное образование. 2016. № 1. С. 70–82.
10. *Хохлов А.В.* Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана: электрон. журн. 2016. № 5. С. 187–245. Режим доступа: http://technomag.edu.ru/doc/840650.html (дата обращения 14.06.2016).
11. *Хохлов А.В.* Свойства кривых ползучести и длительной прочности, порождаемых нелинейной теорией наследственности Ю.Н. Работнова. Отчет о НИР № 5288. НИИ механики МГУ. 2015. 74 с.
12. *Coleman B.D., Makrovitz A., Noll W.* Viscometric flows of non-Newtonian fluids. Theory and experiment. Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1966. – 130 p.
13. *Ильюшин А.А., Огибалов П.М.* Некоторое обобщение моделей Фойгта и Максвелла // Механика полимеров. 1966. № 2. С. 190–196.
14. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. – 280 с.
15. *Городцов В.А., Леонов А.И.* О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязкоупругости // ПММ. 1968. Т. 32. № 1. С. 70–94.
16. *Leonov A.I.* Non-equilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media // Rheol. Acta. 1976. Vol. 15. P. 85–98.
17. Theoretical and experimental investigations of shearing in elastic polymer liquids / *A.I. Leonov, E.Ch. Lipkina, E.D. Paskhin, A.N. Prokunin* // Rheol. Acta. 1976. Vol. 15. No. 7/8. P. 411–426.
18. *Пальмов В.А.* Реологические модели в нелинейной механике деформируемых тел // Успехи механики (Advances in Mechanics). 1980. Т. 3. № 3. С. 75–115.
19. *Прокунин А.Н.* О нелинейных определяющих соотношениях максвелловского типа для описания движения полимерных жидкостей // ПММ. 1984. Т. 48. № 6. С. 957–965.
20. *Larson R.G.* Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions. Butterworth: Boston, 1988. – 364 p.
21. *Leonov A.I.* Analysis of simple constitutive equations for viscoelastic liquids // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1992. Vol. 42. No. 3. P. 323–350.
22. *Leonov A.I., Prokunin A.N.* Non-linear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer

Fluids. London: Chapman and Hall, 1994. – 475 p.
23. *Leonov A.I.* Constitutive equations for viscoelastic liquids: Formulation, analysis and comparison with data // Rheology Series. 1999. Vol. 8. P. 519–575.
24. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
25. *Johnson A.E.* Complex-stress creep of metals // Metallurgical Reviews. 1960. Vol. 5. No. 20. P. 447–506 (= Ползучесть металлов при сложном напряженном состоянии // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1962. № 4. С. 91–146.)
26. *Odqvist F.K.G.* Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture. Oxford: Clarendon Press, 1966. – 170 p.
27. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. – 752 с.
28. *Шестериков С.А., Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Мех. деформируем. тверд. тела. 1980. Т. 13. С. 3–104.
29. *Малинин Н.Н.* Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. – 221 с.
30. *Малинин Н.Н.* Ползучесть в обработке металлов давлением. М.: Машиностроение. 1986. – 221 с.
31. *Betten J.* Creep Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 367 p.
32. A procedure for extracting primary and secondary creep parameters from nanoindentation data / *J. Dean, A. Bradbury, G. Aldrich-Smith, T.W. Clyne* // Mechanics of Materials. 2013. Vol. 65. P. 124–134.
33. *Takagi H., Dao M., Fujiwara M.* Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling // Materials Transactions. 2014. Vol. 55. No. 2. P. 275–284.
34. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. – 310 с.
35. *Кайбышев О.А.* Сверхпластичность промышленных сплавов. М.: Металлургия, 1984. – 264 с.
36. *Васин Р.А., Еникеев Ф.У.* Введение в механику сверхпластичности. Уфа: Гилем,1998. – 280 с.
37. *Соснин О.В., Горев Б.В., Любашевская И.В.* Высокотемпературная ползучесть и сверхпластичность материалов // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 2. С. 140–145.
38. *Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D.* Superplasticity in Metals and Ceramics. Cambridge Univ. Press, 1997. – 287 p.
39. Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation / *V.M. Segal, I.J. Beyerlein, C.N. Tome, V.N. Chuvil'deev, V.I. Kopylov.* New York: Nova Science Pub. Inc., 2010. – 542 p.
40. *Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y.* Creep Analysis with a Stress Range Dependent Constitutive Model // Arch. Appl. Mech. 2009. Vol. 79. P. 619–630.
41. *Naumenko K., Altenbach H.* Modeling of Creep for Structural Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. – 220 p.
42. *Cao Y.* Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests // Mech. Time-Depend. Mater. 2007. Vol. 11. P. 159–172.
43. *Радченко В.П., Шапиевский Д.В.* Анализ нелинейной обобщенной модели Максвелла // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2005. № 38. С. 55–64.
44. *Lu L.Y., Linb G.L., Shihn M.H.* An experimental study on a generalized Maxwell model for nonlinear viscoelastic dampers used in seismic isolation // Engineering Structures. 2012. Vol. 34. No. 1. P. 111–123.
45. Конструкционные полимеры / *П.М. Огибалов, Н.И. Малинин, В.П. Нетребко, Б.П. Кишкин.* Кн.1. М.: Изд-во МГУ, 1972. – 322 с.
46. *Бугаков И И.* Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. – 287 с.
47. *Виноградов Г.В., Малкин А.Я.* Реология полимеров. М.: Химия, 1977. – 440 с.
48. *Ferry J.D.* Viscoelastic Properties of Polymers, 3rd. ed. New York: Wiley, 1980. – 672 p.
49. *Tanner R.I.* Engineering Rheology. Oxford, New York: Clarendon Press, 1985. – 451p.
50. *Whorlow R.W.* Rheological Techniques. Chichester: Ellis Horwood, 1992. – 460 p.
51. *Macosko C.* Rheology: Principles, Measurements and Applications. N.Y.: VCH, 1994. – 549 p.
52. *Rohn C.L.* Analytical Polymer Rheology. Munich: Hanser Publishers, 1995. – 314 p.
53. *Drozdov A.D.* Mechanics of viscoelastic solids. N.Y.: Wiley & Sons,1998. – 484 p.
54. *Brinson H.F., Brinson L.C.* Polymer Engineering Science and Viscoelasticity. Springer Science & Business Media, 2008. – 446 p.
55. *Lakes R.S.* Viscoelastic Materials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 462 p.

56. *Christensen R.M.* Mechanics of Composite Materials. N.Y.: Dover Publications, 2012. – 384 p.
57. *Bergstrom J.S.* Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling. Elsevier, William Andrew: 2015. – 520 p.
58. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. – 592 с.
59. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Конкретизация уравнения состояния при ползучести // Известия АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 86–91.

Материал поступил в редакцию 02.08.16

ХОХЛОВ
Андрей Владимирович

E-mail: **andrey-khokhlov@ya.ru**
Тел.: **(495) 932-8924;**
917 537-9264

Кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории упругости и пластичности Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова. Сфера научных интересов: механика деформируемого твердого тела, математическое моделирование, качественный анализ, идентификация и аттестация определяющих соотношений термовязкоупругопластичности и ползучести. Автор 75 научных работ.