

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ГИРОСКОПА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ РЕЗОНАТОРОМ ПРИ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА АМПЛИТУДУ ВЫНУЖДАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ*

Д.А. Маслов

В работе рассматривается волновой твердотельный гироскоп с цилиндрическим резонатором и электростатическими датчиками управления. На основе нелинейной математической модели, полученной в результате осреднения выведенных уравнений динамики резонатора, разработана методика идентификации параметров гироскопа. Определяемые параметры включают в себя разночастотность, разнородность, параметры внешнего вынуждающего воздействия на резонатор и коэффициент нелинейности. Данные параметры необходимы для контроля качества и совершенствования технологии изготовления гироскопа, а также для компенсации его дрейфа. Учет нелинейности колебаний резонатора позволяет проводить испытания при больших амплитудах колебаний, когда отношение сигнала к шуму достаточно высокое, что способствует повышению точности определения параметров. Предложенная методика повышает точность определения параметров гироскопа за счет учета влияния нелинейности на амплитуду вынуждающих сил.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, цилиндрический резонатор, нелинейные колебания, идентификация параметров.

PARAMETERS IDENTIFICATION FOR THE GYRO WITH A CYLINDRICAL RESONATOR ALLOWING FOR NONLINEARITY IMPACT ON THE FORCING ACTION AMPLITUDE

D.A. Maslov

In the paper there is described the wave solid gyro with a cylindrical resonator and an electrostatic sensor control. The identification parameters method for a wave solid gyro has being developed by using nonlinear mathematical model as a result of averaging the deduced equations for resonator dynamics. Defined parameters include nonlinearity coefficient, uneven stiffness, difference in Q-factors and external forcing parameters. These parameters are necessary for quality control and improvement of the gyro production technology as well as for its drift compensation. The signal to noise ratio being high enough, accounting of the nonlinear resonator oscillations allows testing under large oscillation amplitudes that improves the accuracy of determining the parameters. The proposed method increases accuracy of gyro parameters identification due to taking into account impact of nonlinearity upon the amplitude of driving forces.

Keywords: gyro, cylindrical resonator, nonlinear oscillations, identification of the parameters.

Введение

В настоящее время волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) является одним из перспективных датчиков инерциальной информации, применяемых в навигационных системах движущихся объектов [1–3]. Поэтому повышение

точности ВТГ является актуальным направлением исследования.

В основе функционирования ВТГ лежит физический принцип, заключающийся в инерционных свойствах упругих волн, возбуждаемых

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00772-а, № 16-08-01269-а).

в осесимметричных оболочках [4]. Вследствие несовершенства технологических операций изготовления резонаторов ВТГ, представляющих осесимметричные оболочки, возникает малая анизотропия упругих и диссипативных свойств материала резонатора, которая вызывает расщепление частот изгибных колебаний [5–7]. Возникающие в результате данной анизотропии разночастотность и разнодобротность вызывают систематические погрешности гироскопа. Определение таких параметров, как разночастотность и разнодобротность, а также параметров внешнего вынуждающего воздействия на резонатор и коэффициента нелинейности, необходимо для повышения точности гироскопа – аналитической и силовой компенсации погрешностей гироскопа и балансировки резонатора. Современное состояние разработок ВТГ, методики идентификации параметров ВТГ, особенности технологических процедур изготовления и балансировки резонатора описаны в работах [5–16].

При повышенных амплитудах колебаний возрастают погрешности, вызванные нелинейностью колебаний. Поэтому в предлагаемых способах определения параметров обычно используются малые амплитуды колебаний, позволяющие пренебрегать нелинейностью. Увеличение амплитуды колебаний практически не изменяет случайный шум, как следствие, отношение сигнала к шуму возрастает. Однако при этом возрастают погрешности, вызванные нелинейностью колебаний. Это обстоятельство не позволяет идентифицировать параметры с высокой точностью.

Известна методика определения параметров гироскопа с учетом нелинейности колебаний [15, 16]. Однако в указанной методике не учтено влияние нелинейности на амплитуду вынуждающих сил.

Целью данного исследования является разработка методики идентификации параметров гироскопа с учетом нелинейности, влияющей на амплитуду вынуждающих сил.

Постановка задачи

Рассмотрим тонкий упругий цилиндрический резонатор 1 (рис. 1) радиусом R , длиной L и шириной h , один край которого свободен, а другой жестко прикреплен к подвижному основанию 2. Для поддержания незатухающих колебаний цилиндрической оболочки используются конденсаторы, образованные самой цилиндрической оболочкой и электродами 3, расположенными вблизи свободной кромки ре-

зонатора. Обычно в приборах используют 8 или 16 электродов возбуждения колебаний. Электроды съема информации, расположенные с внутренней стороны цилиндрической оболочки, на рисунке не изображены.

Разработка методики идентификации параметров гироскопа с учетом нелинейности, влияющей на амплитуду вынуждающих сил, включает в себя следующие задачи: вывод уравнений динамики цилиндрического резонатора с учетом нелинейности, влияющей на амплитуду вынуждающих сил; осреднение уравнений динамики; идентификация параметров при стационарных режимах колебаний; проведение вычислительных экспериментов.

Уравнения колебаний резонатора

С основанием 2 прибора свяжем ортогональную систему координат $Ox_1x_2x_3$, ось x_3 направим по оси симметрии резонатора. Предположим, что оболочка как целое вращается вокруг своей оси симметрии x_3 с угловой скоростью Ω , которую в дальнейшем будем считать малой по сравнению с характерной частотой собственных колебаний резонатора ω .

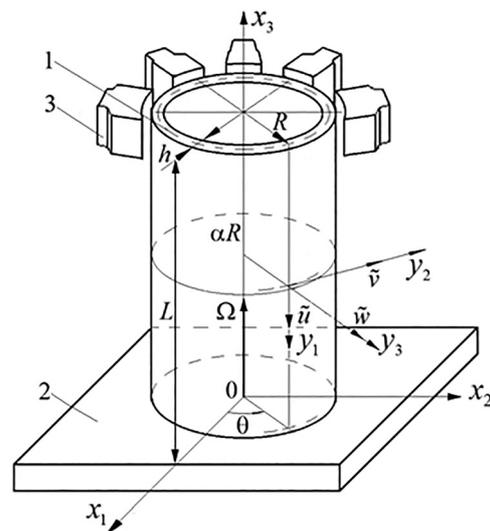


Рис. 1. Расчетная схема ВТГ:

1 – цилиндрический резонатор; 2 – основание гироскопа; 3 – электрод возбуждения колебаний; α – нормализованная (отнесенная к радиусу резонатора) длина образующей; Ω – угловая скорость оболочки; Θ – угол в окружном направлении; x_1, x_2, x_3 – правый ортогональный трехгранник, жестко связанный с основанием прибора; y_1, y_2, y_3 – правый ортогональный трехгранник, жестко связанный со срединной поверхностью цилиндрического резонатора; $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ – компоненты вектора упругого смещения произвольной точки срединной поверхности

В качестве координат примем нормализованную (отнесенную к радиусу резонатора) длину образующей α , $0 \leq \alpha \leq \alpha_1 = L/R$, и угол в окружном направлении θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Для описания деформаций резонатора введем ортогональную систему координат y_1, y_2, y_3 , связанную с меридианами и параллелями его срединной поверхности. Пусть $\mathbf{u} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})^T$ – вектор упругого смещения произвольной точки срединной поверхности оболочки в осях y_1, y_2, y_3 .

Кинетическая энергия резонатора, установленного на подвижном основании, определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} \rho h R^2 \int_0^{\alpha_1} \int_0^{2\pi} \mathbf{V}^2 d\theta d\alpha,$$

где ρ – плотность материала; \mathbf{V} – вектор абсолютной скорости произвольной точки срединной поверхности резонатора.

Вектор абсолютной скорости определяется по формуле

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}), \quad (2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени t .

В проекциях векторов $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{r} на оси y_1, y_2, y_3 имеем:

$$\begin{aligned} \Omega_{y_1} &= -\Omega, & \Omega_{y_2} &= 0, & \Omega_{y_3} &= 0, \\ r_{y_1} &= 0, & r_{y_2} &= 0, & r_{y_3} &= R. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), найдем вектор абсолютной скорости произвольной точки

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} + \Omega(R + \tilde{w}) \\ \dot{\tilde{w}} - \Omega\tilde{v} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Тонкий упругий цилиндрический резонатор совершает колебания на основной моде. Вектор перемещений \mathbf{u} , вызванных упругими деформациями, будем искать в следующем виде [13]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}_1(\alpha, \theta) f_*(t) + \mathbf{h}_2(\alpha, \theta) g_*(t), \quad (5)$$

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} \psi'(\alpha) \cos 2\theta \\ 2\psi(\alpha) \sin 2\theta \\ -4\psi(\alpha) \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} -\psi'(\alpha) \sin 2\theta \\ 2\psi(\alpha) \cos 2\theta \\ 4\psi(\alpha) \sin 2\theta \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ – векторы собственной формы; $f_*(t), g_*(t)$ – искомые функции времени; $\psi(\alpha)$ – функция формы колебаний резонатора, определяемая краевыми условиями; штрихом обозначено дифференцирование по длине образующей α .

Для цилиндрического резонатора (см. рис. 1), один край которого свободен, а другой жестко прикреплен к подвижному основанию, функция второй основной формы колебаний имеет вид [13]:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= 1,067 \cos(1,312\alpha) - 1,067 ch(2,355\alpha) - \\ &- 1,795 \sin(1,312\alpha) + sh(2,356\alpha). \end{aligned}$$

Подставляя функции (5) и (3) в (4), а затем в (1) и выполняя интегрирование по окружной координате θ , найдем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} \left[m(\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2) + 2\zeta_* \Omega (g_* \dot{f}_* - f_* \dot{g}_*) \right], \quad (6)$$

$$m = \pi \int_0^{\alpha_1} \rho h (\psi'^2 + 20\psi^2) R^2 d\alpha,$$

$$\zeta_* = 8\pi \int_0^{\alpha_1} \rho h \psi^2 R^2 d\alpha,$$

где m – приведенная масса резонатора, соответствующая второй основной форме колебаний; ζ_* – коэффициент, зависящий от краевых условий, размеров цилиндрической оболочки и соответствующий второй основной форме колебаний.

В выражении (6) опущены слагаемые, пропорциональные квадрату угловой скорости основания.

Потенциальная энергия деформации резонатора имеет вид [13]:

$$P = \frac{1}{2} c (f_*^2 + g_*^2), \quad c = \omega^2 m, \quad (7)$$

где c – приведенная жесткость резонатора.

Внутреннее трение в системе опишем с помощью модели Кельвина-Фогта. Введем диссипативную функцию Рэлея, которая по структуре аналогична потенциальной энергии упругой деформации резонатора

$$\Psi = \frac{1}{2} c_* (f_*^2 + g_*^2), \quad (8)$$

где c_* – коэффициент демпфирования колебаний.

Энергия электрического поля, локализованного между обкладками заряженных конденсаторов, определяется выражением [19]

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{16} \frac{q_i^2}{C_i}, \quad (9)$$

где C_j – емкость; q_j – заряд j -го конденсатора, образованного резонатором и j -м электродом, расположенным под углом $\theta_j = 2\pi(j-1)/n$ к оси Ox ; $j = 1 \dots n$, $n = 16$ – число электродов.

Будем предполагать, что перекрестное влияние конденсаторов отсутствует. Для вычисления емкости используем формулу [19]

$$C_j = \varepsilon_0 S / (d - \tilde{w}_j) = C_0 / (1 - \tilde{w}_j / d), \quad (10)$$

$$\tilde{w}_j = -4\psi(\alpha_1) f_* \cos 2\theta_j + 4\psi(\alpha_1) g_* \sin 2\theta_j,$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; S – площадь электрода; d – зазор между недеформированным резонатором и электродами; \tilde{w}_j – смещение свободной кромки резонатора в радиальном направлении j -го электрода; C_0 – емкость конденсатора при недеформированном резонаторе.

Подставляя (10) в (9) и используя соотношения (6) и (7), найдем выражение для функции Лагранжа электромеханической системы:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (m(\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2) + 2\zeta_* \Omega (g_* \dot{f}_* - f_* \dot{g}_*)) - \\ & - \frac{1}{2} c (f_*^2 + g_*^2) - \frac{1}{2} c_* (f_*^2 + g_*^2) - \\ & - \frac{1}{2C_0} \sum_{j=1}^n q_j^2 (1 - \tilde{w}_j / d). \end{aligned}$$

Учитывая выражение (8) и лагранжиан, получим следующие уравнения динамики резонатора:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_* + \tilde{\gamma} \dot{f}_* - 2\zeta \Omega \dot{g}_* + \omega^2 f_* + \beta \sum_{j=1}^n q_j^2 \cos 2\theta_j &= 0, \\ \ddot{g}_* + \tilde{\gamma} \dot{g}_* + 2\zeta \Omega \dot{f}_* + \omega^2 g_* - \beta \sum_{j=1}^n q_j^2 \sin 2\theta_j &= 0, \\ \ddot{f}_* + \tilde{\gamma} \dot{f}_* - 2\zeta \Omega \dot{g}_* + \omega^2 f_* + \beta \sum_{j=1}^n q_j^2 \cos 2\theta_j &= 0, \\ \ddot{g}_* + \tilde{\gamma} \dot{g}_* + 2\zeta \Omega \dot{f}_* + \omega^2 g_* - \beta \sum_{j=1}^n q_j^2 \sin 2\theta_j &= 0, \\ \beta &= \frac{2\psi(\alpha_1)}{mdC_0}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\zeta = \zeta_* / m$, $\tilde{\gamma} = c_* / m$.

Пренебрегая сопротивлением электрической цепи между электродом и источником питания, найдем заряд на конденсаторе

$$q_j = U_j C_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (12)$$

где U_j – напряжение, подаваемое на j -й электрод управления.

Вводя в уравнения (11) безразмерные обобщенные координаты

$$f = -4\psi(\alpha_1) f_* / d, \quad g = 4\psi(\alpha_1) g_* / d$$

и учитывая (12), получим уравнения динамики резонатора:

$$\ddot{f} + \tilde{\gamma} \dot{f} - 2\zeta \Omega \dot{g} + \omega^2 f - \tilde{\varepsilon} \sum_{j=1}^n B_j \cos 2\theta_j = 0,$$

$$\ddot{g} + \tilde{\gamma} \dot{g} + 2\zeta \Omega \dot{f} + \omega^2 g - \tilde{\varepsilon} \sum_{j=1}^n B_j \sin 2\theta_j = 0,$$

$$\tilde{\varepsilon} = 8\psi^2(\alpha_1) C_0 / (md^2), \quad (13)$$

$$B_j = U_j^2 / (1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j)^2.$$

Используется режим вынужденных колебаний резонатора. Разность потенциалов между электродами управления и резонатором задается следующим образом:

$$U_1 = U_9 = U_0 (1 - u_1 \sin \omega_0 t + u_2 \cos \omega_0 t),$$

$$U_5 = U_{13} = U_0 (1 + u_1 \sin \omega_0 t - u_2 \cos \omega_0 t),$$

$$U_3 = U_{11} = U_0 (1 - u_3 \sin \omega_0 t + u_4 \cos \omega_0 t),$$

$$U_7 = U_{15} = U_0 (1 + u_3 \sin \omega_0 t - u_4 \cos \omega_0 t),$$

где U_0 – постоянное опорное напряжение; u_1, u_2, u_3, u_4 – нормализованные амплитуды напряжения; ω_0 – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора.

На остальных электродах разность потенциалов задается равной U_0 .

Раскладываем f и g слагаемые в уравнениях (13) в ряд по степеням. Слагаемые со степенями по f и g выше третьей и слагаемые, умноженные на u^2 , опускаем ввиду высокого порядка малости. Вводим безразмерное время $\tau = \omega t$ и обозначаем параметр

$$\varepsilon = 64\psi^2(\alpha_1) U_0^2 C_0 / md^2 \omega^2,$$

характеризующий малую величину электрических сил, действующих на резонатор. Тогда уравнения (13) динамики резонатора гироскопа примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{f} + f &= \varepsilon \left[-\dot{\gamma} \dot{f} - \nu \dot{g} + 3(f^2 + g^2) f + \right. \\ & \left. + (1 + 3f^2)(-u_1 \sin \mu \tau + u_2 \cos \mu \tau) \right], \\ \ddot{g} + g &= \varepsilon \left[-\dot{\gamma} \dot{g} + \nu \dot{f} + 3(f^2 + g^2) g + \right. \\ & \left. + (1 + 3g^2)(-u_3 \sin \mu \tau + u_4 \cos \mu \tau) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mu = \omega_0 / \omega = 1 + \varepsilon \lambda,$$

где $\nu = 2\zeta\Omega/\omega$ – безразмерная угловая скорость; $\gamma = \tilde{\gamma}/\omega$ – безразмерный коэффициент демпфирования колебаний; λ – относительная частотная настройка между частотой возбуждения ω_0 и основной резонансной частотой ω при мягком резонансном возбуждении колебаний.

В уравнениях (14) и далее точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ .

Следуя работам [5, 13–16], рассмотрим уравнения динамики (14) с учетом погрешностей изготовления резонатора:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + f &= \varepsilon \left[-(c + h_c)f - (n + h_s)g - (\gamma + g_c)\dot{f} - \right. \\ &\quad \left. (\nu + g_s)\dot{g} + \xi(f^2 + g^2)f + (1 + 3f^2) \times \right. \\ &\quad \left. \times (-u_1 \sin \mu\tau + u_2 \cos \mu\tau) \right], \quad (15) \\ \ddot{g} + g &= \varepsilon \left[-(c - h_c)g - (-n + h_s)f - (\gamma - g_c)\dot{g} - \right. \\ &\quad \left. (-\nu + g_s)\dot{f} + \xi(f^2 + g^2)g + (1 + 3g^2) \times \right. \\ &\quad \left. \times (-u_3 \sin \mu\tau + u_4 \cos \mu\tau) \right], \end{aligned}$$

где c и n – параметры позиционных сил; $h_s = h^* \sin 4\alpha$, $h_c = h^* \cos 4\alpha$ и $g_s = g^* \sin 4\beta$, $g_c = g^* \cos 4\beta$ – компоненты, характеризующие упругую и вязкую анизотропию; h^* и g^* – модули разночастотности и разнодобротности; α и β – углы ориентации главных осей жесткости и главных осей диссипации относительно отсчетных осей; ξ – коэффициент нелинейности.

Нелинейные относительно f и g слагаемые $\xi(f^2 + g^2)f$, $\xi(f^2 + g^2)g$, представляющие в уравнениях (15) кубическую нелинейность, получены в работе [17] при рассмотрении классического маятника Фуко, а также в работе [18] при учете нелинейности колебаний электрических зарядов в контуре управления при подаче опорного напряжения на электроды и в работе [13] в предположении о том, что упругие свойства материала резонатора описываются нелинейным законом Гука. Полученные уравнения (15) содержат не только кубическую нелинейность, присущую всем волновым твердотельным гироскопам, но и нелинейные слагаемые, влияющие на амплитуду вынуждающих сил.

Проводим осреднение системы (15) по методу Крылова – Боголюбова в первом приближении по малому параметру ε [4, 20]. Для этого используем переход к медленным переменным $p_1(\tau)$, $q_1(\tau)$, $p_2(\tau)$, $q_2(\tau)$ с помощью следующих замен:

$$\begin{aligned} f &= p_1 \sin \mu\tau + q_1 \cos \mu\tau, \\ g &= p_1 \cos \mu\tau - q_1 \sin \mu\tau, \\ \dot{f} &= \mu(p_2 \sin \mu\tau + q_2 \cos \mu\tau), \\ \dot{g} &= \mu(p_2 \cos \mu\tau - q_2 \sin \mu\tau). \end{aligned}$$

Векторно-матричная запись системы уравнений движения в медленных переменных p_1, q_1, p_2, q_2 имеет вид:

$$2\dot{\mathbf{q}} = \varepsilon(\mathbf{D}\mathbf{z} - \mathbf{y}), \quad (16)$$

$$\mathbf{q} = (q_1, p_1, q_2, p_2)^T; \quad \mathbf{z} = (\gamma, \nu, g_c, g_s, c, n, h_c, h_s, u_1, u_2, u_3, u_4, \xi)^T; \quad \mathbf{y} = (2\lambda p_1, -2\lambda q_1, 2\lambda p_2, -2\lambda q_2)^T;$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 & p_1 & p_2 & p_1 & p_2 & 1+k_1 & k_5 & 0 & 0 & k_7 \\ -p_1 & -p_2 & -p_1 & -p_2 & -q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 & k_5 & 1+k_2 & 0 & 0 & k_8 \\ -q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & p_1 & 0 & 0 & 1+k_3 & k_6 & k_9 \\ -p_2 & p_1 & p_2 & -p_1 & -q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 & 0 & 0 & k_6 & 1+k_4 & k_{10} \end{pmatrix},$$

$$k_1 = 3(3p_1^2 + q_1^2)/4, \quad k_2 = 3(p_1^2 + 3q_1^2)/4, \quad k_3 = 3(3p_2^2 + q_2^2)/4, \quad k_4 = 3(p_2^2 + 3q_2^2)/4,$$

$$k_5 = -3q_1 p_1 / 2, \quad k_6 = -3q_2 p_2 / 2, \quad k_7 = -p_1 E - q_2 K, \quad k_8 = q_1 E - p_2 K, \quad k_9 = -p_2 E + q_1 K,$$

$$k_{10} = q_2 E + p_1 K, \quad K = (p_2 q_1 - p_1 q_2) / 2, \quad E = 3(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2) / 4,$$

где \mathbf{q} – вектор медленных переменных; \mathbf{z} – вектор параметров; \mathbf{y} – измеряемый вектор; \mathbf{D} – матрица с элементами, зависящими от измеряемых медленных переменных; K, E – нелинейные элементы матрицы \mathbf{D} , их слагаемые и множители.

Уравнения (16) отличаются от уравнений статьи [15] коэффициентами k_1, \dots, k_6 , учитывающими влияние нелинейности на амплитуду вынуждающих сил.

В стационарном режиме вынужденных колебаний резонатора, определяемом алгебраической системой уравнений, полученной из системы уравнений (16) при $\dot{\mathbf{q}} = 0$, уравнения принимают вид:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Dz}. \quad (17)$$

Идентификация параметров

В системе алгебраических уравнений (17) измеряемыми являются стационарные значения p_1, q_1, p_2, q_2 , полученные при заданной частотной настройке $\lambda = \lambda_j$, где $j = 1, \dots, N$, N – число стационарных режимов колебаний резонатора. Уравнения (17) с учетом случайных ошибок измерений имеют вид

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{D}_j \mathbf{z} + \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (18)$$

где матрица \mathbf{D}_j и вектор \mathbf{y}_j содержат элементы, зависящие от измеряемых медленных переменных, которые соответствуют частотным настройкам $\lambda_j, j = 1, \dots, N$, $\mathbf{e}_j = (e_{j1}, e_{j2}, e_{j3}, e_{j4})^T$ – векторный случайный гауссов процесс с нулевым математическим ожиданием, $\text{cov}[e_{ji}e_{j\ell}] = 0, i \neq \ell, \text{cov}[e_{ji}e_{ji}] = \sigma_e^2, i, \ell = 1, 4, j = 1, \dots, N$.

Далее составляем переопределенную алгебраическую систему уравнений из N блоков (18), соответствующих заданным частотным настройкам

$$\mathbf{y} = \mathbf{Dz} + \mathbf{e},$$

и по методу наименьших квадратов получаем оценку $\hat{\mathbf{z}}$ параметров математической модели

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{y},$$

которая минимизирует остаточную дисперсию $\hat{\sigma}^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{D}\hat{\mathbf{z}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{D}\hat{\mathbf{z}}) / (4N - k)$, где $k = 13$ – число идентифицируемых параметров.

Доверительный интервал для определяемых параметров задаем неравенствами

$$\hat{z}_j - t_\gamma \hat{\sigma} \sqrt{c_{jj}} \leq z_j \leq \hat{z}_j + t_\gamma \hat{\sigma} \sqrt{c_{jj}}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где c_{jj} – диагональные элементы матрицы $\mathbf{C} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}$; t_γ – число, определяемое из таблицы значений функций Лапласа.

Вычислительные эксперименты

Для проверки и тестирования алгоритма решим сначала прямую задачу: по заданным параметрам найдем составляющие сигналов p_1, q_1, p_2, q_2 , характеризующих стационарные колебания резонатора.

Рассмотрим гироскоп [13] с цилиндрическим резонатором, имеющий следующий вектор нормализованных параметров:

$$\mathbf{z} = (0,23; 0,1; 0,01; 0,05; 0; 0; 0,0233; 0,0139; 0,048; 0; 0; 0; 3)^T.$$

Здесь, в соответствии с уравнениями (15), задаются безразмерные параметры гироскопа: $\gamma = 0,23$ – параметр, характеризующий демпфирование колебаний; $\nu = 0,1$ – параметр, пропорциональный угловой скорости основания; $g_c = 0,01, g_s = 0,05$ – компоненты, характеризующие вязкую анизотропию; $c = n = 0$ – параметры позиционных сил; $h_c = 0,0233, h_s = 0,0139$ – компоненты, характеризующие упругую анизотропию; $u_1 = 0,048, u_2 = u_3 = u_4 = 0$ – нормализованные амплитуды напряжения; $\xi = 3$ – коэффициент нелинейности.

На рисунке 2 представлены амплитудно-частотные характеристики $A = A(\lambda)$, где $A = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}$, при различных амплитудах напряжения u_1 , вызывающего вынужденные колебания. При увеличении амплитуды напряжения u_1 возрастает амплитуда колебаний резонатора и увеличивается наклон резонансного пика влево. Наибольшее влияние нелинейности наблюдается при $u_1 = 0,06$, а при $u_1 = 0,024$ колебания можно рассматривать как линейные.

Решая прямую задачу, получим зависимости медленных переменных p_1, q_1, p_2, q_2 от частотной настройки λ при $u_1 = 0,048$ (рис. 3). Предпо-

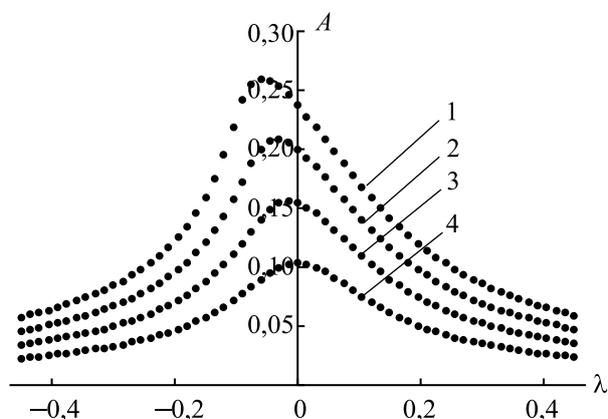


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики $A(\lambda)$ при различных значениях u_1 :
1 – $u_1 = 0,06$; 2 – $u_1 = 0,048$; 3 – $u_1 = 0,036$; 4 – $u_1 = 0,024$

ложим, что измеряемые величины p_1, q_1, p_2, q_2 имеют погрешность в виде случайных ошибок, которые подчиняются нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением $\sigma_e = 0,001$.

Затем перейдем к обратной задаче. Используя рассчитанные медленные переменные p_1, q_1, p_2, q_2 , определим параметры ВТГ. Сравнивая найденные и заданные параметры, подсчитаем погрешность идентификации параметров гироскопа. Для расчета относительной погрешности используем евклидову норму вектора:

$$r = \|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\| / \|\mathbf{z}\|.$$

При идентификации параметров по методике, учитывающей влияние нелинейности на амплитуду вынуждающих сил, получаем:

$$\hat{\mathbf{z}}_1 = (0,2261; 0,1008; 0,0129; 0,0514; 0,0003; 0,0019; 0,0247; 0,0167; 0,0479; 0,0000; 0,0000; 0,0001; 3,0925)^T, r_1 = 0,0298.$$

При идентификации параметров по методике, учитывающей только кубическую нелинейность [15], получаем:

$$\hat{\mathbf{z}}_2 = (0,2247; 0,1095; 0,0117; 0,0599; 0,0007; 0,0035; 0,0248; 0,0183; 0,0486; 0,0001; 0,0000; 0,0001; 3,1122)^T, r_2 = 0,0362.$$

При расчетах по методике идентификации параметров, не учитывающей нелинейности (коэффициент нелинейности в данном случае отсутствует), получаем:

$$\hat{\mathbf{z}}_3 = (0,2255; 0,1131; 0,0133; 0,0646; -0,0381; -0,0901; 0,0447; -0,0734; 0,0488; 0,0016; 0,0001; 0,0005)^T, r_3 = 0,4552.$$

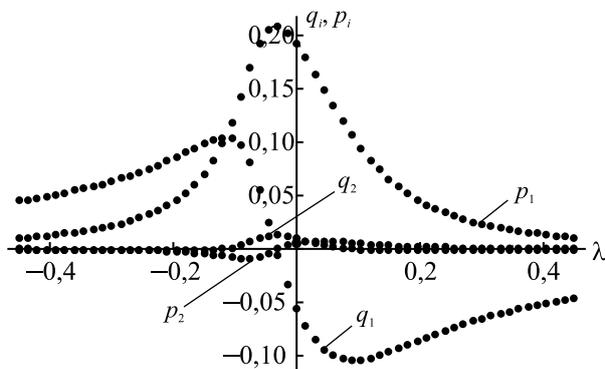


Рис. 3. Зависимости p_i, q_i ($i = 1, 2$) от частотной настройки λ

Проведенные вычислительные эксперименты подтверждают значительное повышение точности определения параметров волнового твердотельного гироскопа с цилиндрическим резонатором при использовании методик идентификации параметров, учитывающих нелинейность амплитуды колебаний, в том числе, предложенной методики, учитывающей влияние нелинейности на амплитуду вынуждающих сил.

Заключение

В работе получены нелинейные уравнения динамики резонатора волнового твердотельного гироскопа в медленных переменных, содержащие не только кубические нелинейности, присущие всем волновым твердотельным гироскопам, но и нелинейные слагаемые, влияющие на амплитуду вынуждающих сил. Разработана методика идентификации параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом влияния нелинейности на амплитуду вынуждающих сил. Использование параметров гироскопа, найденных по данной методике идентификации, позволит повысить точность гироскопа при аналитической и силовой компенсации погрешностей.

Список литературы

1. Пешехонов В.Г. Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем // Гироскопия и навигация. 2011. № 1. С. 3–17.
2. Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов / М.А. Басараб, Б.С. Лунин, В.А. Матвеев, А.В. Фомичев, Е.А. Чуманкин, А.В. Юрин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 4. С. 80–96.
3. Бесплатформенная инерциальная навигационная система на базе твердотельного волнового гироскопа / Г.И. Джанджгава, К.А. Бахонин, Г.М. Виноградов, А.В. Требухов // Гироскопия и навигация. 2008. № 1. С. 22–33.
4. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. – 125 с.
5. Журавлев В.Ф. Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 186–192.
6. Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф. О балансировке волнового твердотельного гироскопа //

- Известия РАН. Механика твёрдого тела. 1998. № 4. С. 4–16.
7. Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 167 с.
 8. A Novel Vibration Mode Testing Method for Cylindrical Resonators Based on Microphones / Y. Zhang, Y. Wu, X. Wu, X. Xi, J. Wang // Sensors. 2015. No 15. P. 1954–1963; doi:10.3390/s150101954.
 9. Monolithic cylindrical fused silica resonators with high Q factors / Y. Pan, D. Wang, Y. Yanyan Wang, J. Liu, S. Wu, T. Qu, K. Yang, H. Luo // Sensors. 2016. No 16. P. 1185–1198.
 10. Static Balancing of Metal Resonators of Cylindrical Resonator Gyroscopes / M.A. Basarab, V.A. Matveev, B.S. Lunin, E.A. Chumankin // Gyroscopy and Navigation. 2014. Vol. 5. No 4. P. 213–218.
 11. Algorithms and Technologies for Surface Balancing of Hemispherical and Cylindrical Resonator Gyroscopes / M.A. Basarab, V.A. Matveev, B.S. Lunin, E.A. Chumankin // Proceedings of the 22nd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. ICINS 2015. 2015. No 15. P. 383–386.
 12. Жанруа А., Буве А., Ремиллье Ж. Волновой твердотельный гироскоп и его применение в морском приборостроении // Гироскопия и навигация. 2013. № 4. С. 24–34.
 13. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009. – 228 с.
 14. Гавриленко А.Б., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Экспериментальные методы определения параметров вязкоупругой анизотропии резонатора волнового твердотельного гироскопа // Вестник МЭИ. 2010. № 5. С. 13–19.
 15. Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 5. С. 18–23.
 16. Пат. 2544308 Российская Федерация. Способ определения параметров волнового твердотельного гироскопа / Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В.; опубл. 20.03.15. Бюл. № 14.
 17. Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Известия АН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
 18. Maslov A.A., Maslov D.A., Merkurjev I.V. Nonlinear Effects in Dynamics of Cylindrical Resonator of Wave Solid-State Gyro with Electrostatic Control System. // Gyroscopy and Navigation. 2015. Vol. 6. No. 3. P. 224–229.
 19. Мартыненко Ю.Г. Аналитическая динамика электромеханических систем. М.: Изд-во МЭИ, 1984. – 64 с.
 20. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. – 454 с.

Материал поступил в редакцию 10.02.2017

**МАСЛОВ
Дмитрий Александрович**

E-mail: dm_93@live.ru
Тел.: (916) 247-51-00

Аспирант кафедры высшей математики Национального исследовательского университета «МЭИ». Сфера научных интересов: теория колебаний и устойчивость движения, математическое моделирование, теоретическая механика, гироскопия. Автор семи научных работ по исследованию динамики волновых твердотельных и микромеханических гироскопов.