

СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ НАГРУЖЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ, ПОРОЖДАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЬЮ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ ТИПА МАКСВЕЛЛА

А.В. Хохлов

В статье продолжено аналитическое исследование нелинейного определяющего соотношения типа Максвелла для реономных материалов: качественных свойств порождаемых им квазистатических кривых, сфер влияния двух его материальных функций, области его применимости, арсенала возможностей и способов идентификации и настройки. Соотношение нацелено на описание комплекса основных реологических эффектов, типичных для структурно стабильных реономных материалов, обладающих нелинейной наследственностью, положительной скоростной чувствительностью и разнсопротивляемостью. Выведено общее уравнение семейства диаграмм нагружения с постоянными скоростями, порожденных этим определяющим соотношением. Аналитически изучены качественные свойства диаграмм нагружения в зависимости от материальных функций и скорости нагружения: интервалы монотонности и выпуклости диаграмм, характер их зависимости от скорости нагружения, существование и форма предельных кривых при стремлении скорости нагружения к нулю или бесконечности, условия существования точки перегиба. Проанализированы формулы для мгновенного и длительного модулей, условия их конечности и отличия от нуля. Эти качественные свойства сопоставлены с типичными свойствами экспериментальных диаграмм нагружения классов реономных материалов для выявления комплекса реологических эффектов, которые определяющее соотношение типа Максвелла способно (или не способно) моделировать, а также для определения соответствующих необходимых ограничений на материальные функции и индикаторов области применимости.

Ключевые слова: вязкоупругопластичность, диаграммы деформирования, скорость нагружения, разнсопротивляемость, скоростная чувствительность, мгновенный модуль, равновесная диаграмма, кривые релаксации и ползучести, сверхпластичность, полимеры.

PROPERTIES OF STRESS-STRAIN CURVES GENERATED BY THE NONLINEAR MAXWELL-TYPE VISCOELASTOPLASTIC MODEL AT CONSTANT STRESS RATES

A.V. Khokhlov

The analytic study of the nonlinear Maxwell-type constitutive relation with two arbitrary material functions is continued in order to find out qualitative properties of its basic theoretic quasi-static curves and to reveal the capabilities, applicability scope and techniques of identification and tuning of the model. The constitutive equation is aimed at adequate modeling of the rheological phenomena set which is typical for non-ageing rheonomic materials exhibiting non-linear hereditary properties, positive strain rate sensitivity, secondary creep, yielding at constant stress and tension compression asymmetry. Under minimal primary restrictions on two material functions, the general equation of theoretic stress-strain curves produced by the model at constant stress rates is derived and analyzed in uni-axial case. The main properties of the stress-strain curves and their dependence on stress rate and material functions are examined. Intervals of monotonicity and convexity of stress-strain curves, existence of inflection points, the instantaneous and long-term equilibrium moduli and their independence of stress rate, the stress-strain curves family convergence to limit curve as stress rate tends to zero or infinity and shapes of the equilibrium and the instantaneous stress-strain curve are considered. The qualitative features of stress-strain curves family generated by the constitutive equation are compared to typical test stress-strain curves of viscoelastoplastic materials at constant stress rate in order to examine the model abilities to provide an adequate description of basic rheological phenomena, to find necessary phenomenological restrictions which should be imposed on material functions and to indicate the field of applicability or non-applicability of the model.

Keywords: elastoviscoplasticity, stress-strain curves, stress rate, tension compression asymmetry, rate sensitivity, instantaneous modulus, equilibrium stress-strain curve, creep curves, relaxation curves, superplasticity, polymers.

Введение

Данная статья – продолжение цикла работ, посвященных качественному анализу нелинейного определяющего соотношения (ОС) типа Максвелла для реономных материалов. Цель этого анализа – выявление круга реологических явлений, которые способны (или не способны) моделировать ОС, необходимых феноменологических ограничений на материальные функции, обеспечивающих адекватное качественное описание экспериментальных данных, поиск индикаторов области применимости и способов идентификации и настройки этого ОС [1–5].

Будем рассматривать изотермические одномерные процессы, характеризуемые в точке тела историей напряжения $\sigma(t)$ и деформации $\varepsilon(t)$, $t > 0$. Связь между процессами $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ зададим по аналогии с реологической моделью Максвелла, т.е. постулируем, что деформация $\varepsilon(t)$ равна сумме упругой и вязкопластической компонент, каждая из которых зависит от напряжения $\sigma(t)$, но нелинейно:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v, \quad \varepsilon_e = F(\sigma) / E, \quad \dot{\varepsilon}_v = V(\sigma) / \eta. \quad (1)$$

ОС (1) содержит две материальные функции (МФ): $F(x)$, $V(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$, $\omega_- < 0$, $\omega_+ > 0$ (возможны случаи $\omega_- = -\infty$, $\omega_+ = +\infty$) и две постоянные: «модуль упругости» $E > 0$ и коэффициент вязкости $\eta > 0$. Если ω_+ и ω_- конечны, они могут быть интерпретированы как мгновенные пределы прочности при растяжении и сжатии (как материальные параметры ОС). Параметры E и η выделены из МФ F и V для удобства сопоставления с линейной моделью Максвелла (получающейся при $V(x) = F(x) = x$) и учета влияния температуры в форме $E = E(T)$, $\eta = \eta(T)$ [3, 5]. Процессы $\sigma(t)$, $t \geq 0$ в (1) предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими (при $t < 0$ считаем, что $\sigma \equiv 0$). Обезразмеривание напряжения можно производить делением на cE ($c > 0$) или на характерное напряжение материала (пределы упругости, ползучести, прочности или текучести при некоторой фиксированной температуре и характерной скорости деформирования). Безразмерное время вводится делением на характерное время, например, на время релаксации линейной модели Максвелла $\tau_r = \eta / E$ при фиксированной температуре. Требования к МФ будут рассмотрены ниже.

ОС можно записать в интегральной и дифференциальной формах:

$$\varepsilon(t) = E^{-1} F(\sigma(t)) + \eta^{-1} \int_0^t V(\sigma(\tau)) d\tau$$

или $\varepsilon = \Pi \sigma$, (2)

$$\dot{\varepsilon} = E^{-1} F'(\sigma) \dot{\sigma} + \eta^{-1} V(\sigma), \quad t > 0. \quad (3)$$

Общие тензорные формулировки нелинейных ОС максвелловского типа для вязкоупругих сред (при больших деформациях), родственных ОС (1) (но не совпадающих с ним), описание кинематики, термодинамические аспекты и способы конкретизации ОС изучались в работах [6–14]. В работах [7, 8, 10–14] внимание было сосредоточено на описании поведения жидкостей, обсуждались эксперименты и эффекты, присущие жидкостям (расплавам и растворам полимеров и т.п.). В них не рассматривались кривые ползучести, релаксации и деформирования, порождаемые ОС, и многие вопросы, специфичные для механики деформируемого твердого тела, не анализировались соответствующие феноменологические ограничения на материальные функции и параметры ОС (1) и способы их идентификации по кривым квазистатических испытаний.

В частном случае $F(x) \equiv 0$, $V(x) = x|x|^{n-1}$ ($n > 1$), ОС (2) дает степенной закон вязкого течения $\dot{\varepsilon}_v = \eta^{-1} \sigma^n$ (*Norton-Bailey model*) – самый простой и популярный в теории ползучести, вязкопластичности, реологии полимеров и гидродинамике неньютоновских жидкостей ($n > 1$ – условие псевдопластичности среды). Он описывает зависимость скорости установившейся ползучести от напряжения [15–20] и течение степенных жидкостей [21] и используется для моделирования сверхпластического течения материалов [22–25] наряду с обобщением вида

$$\sigma(t) = K \dot{\varepsilon}(t)^{1/n} \varepsilon(t)^q, \quad n > 1, \quad q \geq 0. \quad (4)$$

Частный случай ОС (1) с $F(x) = x$ формально совпадает с вырожденным вариантом модели *VBO* (*viscoplasticity based on overstress*) [26], когда задано нулевое равновесное напряжение $g(\varepsilon)$. Задав $F(x) = x$ и $V(x) = x|x|^{n-1}$ ($n > 1$) в ОС (3), получим трехпараметрическую модель с линейной упругостью:

$$\dot{\varepsilon} = E^{-1} \dot{\sigma} + \eta^{-1} |\sigma| \sigma^{n-1}. \quad (5)$$

Она во многом близка ОС (4), традиционно используемому для описания ползучести с деформационным упрочнением и сверхпластиче-

ского течения [15–18, 22–25, 27–29], но теоретические кривые модели (5) лучше описывают данные испытаний материалов в (пред)сверхпластичном состоянии, и сфера ее применимости гораздо шире, чем сверхпластичность и ползучесть [1–5]. Модель применялась в ряде работ для описания экспериментальных кривых ползучести и решения конкретных задач [15, 16, 30, 31]. В монографии [23] она применялась к моделированию сверхпластичности. В статьях [32–36] исследовались кривые ползучести, обратной ползучести и (численно) «диаграммы мгновенно-упругого деформирования» параллельного соединения двух моделей вида (5) с различными показателями n , а также модели с $F(x) = x|x|^{m-1}$.

Более подробные обзоры литературы и родственных моделей (в теории ползучести, сверхпластичности и реологии полимеров) приведены в работах [3–5].

Цель данной статьи – аналитическое изучение общих свойств семейства диаграмм нагружения с постоянными скоростями, порождаемых ОС (2) с произвольными МФ F и V : интервалов монотонности и выпуклости диаграмм, характера их зависимости от скорости нагружения и МФ, формы предельных кривых при стремлении скорости нагружения к нулю или бесконечности, условий существования точки перегиба, поведения мгновенного и длительного модулей.

Математические результаты данной статьи о свойствах оператора (2) и порожденных им кривых нагружения (этот термин используется как синоним термина «диаграмма деформирования с постоянной скоростью нагружения») справедливы как для случая малых деформаций в ОС (2), так и для случая, когда ОС (2) связывает логарифмическую деформацию $\varepsilon = \ln[l(t)/l_0]$ с истинным напряжением (или истории обобщенных нагрузок и перемещений при испытаниях образцов на растяжение, кручение, изгиб, индентирование и т.п.). От выбора мер деформации и напряжения (перемещений и нагрузок), конечно, зависит физический (механический) смысл этих результатов, сопоставление с данными испытаний и методика идентификации.

Первичные ограничения на материальные функции модели

Функция $F(x)$ в ОС (1) задает закон упругого деформирования $\varepsilon_e = F(\sigma)/E$. Поэтому

минимальные первичные ограничения на $F(x)$ (естественные с точки зрения феноменологии и минимальные с математической точки зрения [1–3]) таковы: $F(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$ – непрерывная, (строго) возрастающая функция с кусочно-непрерывной производной, такая, что $F(0) = 0$ (тогда $x F(x) > 0$, т.е. $\text{sgn } F(x) = \text{sgn } x$). Последние два условия обеспечивают совпадение знаков σ и $\varepsilon_e(\sigma)$ и выполнение условия $\varepsilon_e(0) = 0$. Из строгого возрастания $F(x)$ следует возрастание $\varepsilon_e(\sigma)$ и энергии упругой деформации с ростом $|\sigma|$, а также – существование обратной функции $f = F^{-1}$ на промежутке $(\underline{y}; \bar{y})$, где $\bar{y} := \sup F(x) = F(\omega_+ - 0)$, $\underline{y} := \inf F(x) = F(\omega_- + 0)$. Ниже будет доказано, что МФ f полностью определяет форму диаграммы мгновенного деформирования $\sigma(\varepsilon)$, т.е. предельной кривой, к которой сходится семейство $\sigma(\varepsilon, b)$ диаграмм деформирования (ДД) ОС (1) с постоянной скоростью нагружения b , когда $b \rightarrow \infty$. Дифференцируемость $F(x)$ требуется для определения скорости деформации в соотношении (3) и касательного модуля ДД (см. ниже).

Функция вязкости $V(x)/\eta$ в ОС регулирует наследственные свойства, скорости диссипации, релаксации, ползучести и накопления пластической деформации, чувствительность к скорости деформации и длительную прочность [1–5]. Чем больше отношение $|V(\sigma)|/\eta$, тем меньше вязкое сопротивление (больше $|\dot{\varepsilon}_v|$ и $|\dot{\varepsilon}|$ при данном σ), тем ближе поведение модели к поведению жидкости, тем выше скорости диссипации, релаксации и ползучести, тем ниже (как будет доказано) лежит любая ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ и тем выше скоростная чувствительность модели. Минимальные первичные ограничения на $V(x)$: $V(x)$ – непрерывная, (нестрого) возрастающая функция на интервале (ω_-, ω_+) , такая, что $V(0) = 0$ (тогда $V(x)x \geq 0$).

Исследование кривых релаксации и ползучести, порождаемых ОС (1) [1–5], показывает, что следует различать два основных случая, в которых ОС (1) (моделируемый материал) ведет себя по-разному: 1) $|V(x)| > 0$ при $x \neq 0$, 2) $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$, $\sigma_- \leq 0$, $\sigma_+ \geq 0$, $\sigma_+ \neq \sigma_-$ (по определению, σ_- и σ_+ – нижняя и верхняя грани множества нулей МФ $V(x)$). Во втором случае, при $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$, ОС (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала (диссипации и гистерезиса нет, релаксация и ползучесть отсутствуют, ДД

$\sigma(\varepsilon, b)$ не зависит от скорости нагружения при $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$, где $\varepsilon_{\pm} := E^{-1}F(\sigma_{\pm})$, а при $\sigma > \sigma_+$ (или $\sigma < \sigma_-$) начинают проявляться вязкопластические свойства; σ_- , σ_+ играют роль пределов упругости и ползучести материала при сжатии и растяжении.

Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии (у которых совпадают как диаграммы деформирования при растяжении и сжатии, так и кривые ползучести и релаксации) МФ должны быть нечетными (и $\omega_- = -\omega_+$). МФ можно задавать лишь при $x \in (0, \omega_+)$ и продолжать на $(-\omega_+, 0)$ по формуле $y(x) = y(|x|)\text{sgn}(x)$ (тогда обеспечивается непрерывность $y(x)$ и $y'(x)$ в точке $x = 0$). Если материалы при растяжении и сжатии ведут себя не одинаково, следует «склеивать» МФ (одну или обе) из двух разных ветвей на $(0, \omega_+)$ и $(\omega_-, 0)$.

Наложенные на МФ ОС (2) первичные ограничения обеспечивают, в частности, его термодинамическую согласованность, т.е. положительность работы напряжения и неотрицательность диссипации (соблюдение диссипативного неравенства) в произвольном процессе нагружения. Работа напряжения $\sigma(\tau)$ в процессе деформирования $\varepsilon(\tau)$, связанном с $\sigma(\tau)$ ОС (3), выражается формулой

$$A = \int_0^t \sigma(\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau = \int_0^t E^{-1} \sigma F'(\sigma) \dot{\sigma} d\tau + \int_0^t \eta^{-1} V(\sigma) \sigma d\tau = U + W; \quad (6)$$

$$U := E^{-1} \int_0^{\sigma} x F'(x) dx = \int_0^{F(\sigma)/E} f(Ez) dz; \quad (7)$$

$$W = \eta^{-1} \int_0^t \sigma(\tau) V(\sigma(\tau)) d\tau.$$

Здесь $U = U(\sigma)$ – энергия упругой деформации, $W = W[t; \sigma(\tau)]$ – диссипация, $f = F^{-1}$ – обратная функция к МФ F . Из $F'(x) > 0$ следует, что $U'(\sigma) = E^{-1} \sigma F'(\sigma) > 0$ при $\sigma > 0$ и $U > 0$, а из $xV(x) > 0$ при $x \neq 0$ следует, что $\dot{W}(t) = \eta^{-1} \sigma(t) V(\sigma(t)) > 0$ при $\sigma(t) \neq 0$ и $W(t) > 0$ при $t > 0$. Равенство $W(t_0) = 0$ возможно лишь в случае $\sigma(t) \equiv 0$ при $t < t_0$ или в случае, когда $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$, и $\sigma(\tau) \in [\sigma_-, \sigma_+]$ для всех $\tau < t_0$ (т.е. $|\sigma|$ не превышает пределов упругости).

Типичные свойства базовых кривых квазистатических испытаний структурно стабильных реономных материалов

Для большинства материалов, в которых не идут химические или фазовые превращения, существенно влияющие на их механические характеристики, экспериментальные кривые деформирования, релаксации и ползучести, обратной ползучести и длительной прочности при постоянной температуре в условиях одноосных квазистатических испытаний, как правило, обладают следующими общими качественными свойствами.

1. Нулевому напряжению $\sigma(t) \equiv 0$, $t > 0$ соответствует деформация $\varepsilon(t) \equiv 0$, $t > 0$.

2. Диаграммы деформирования (ДД) $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$ «любого» структурно-стабильного материала с постоянной скоростью деформирования $\dot{\varepsilon} = a$ – неубывающие функции вплоть до разрушения образца или, по крайней мере, при $\varepsilon \in [0; \hat{\varepsilon}]$, где $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(a)$ – точка максимума диаграммы деформирования. Этим же свойством обладают и ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ при постоянной скорости нагружения b .

3. С увеличением скорости нагружения (или деформирования) жесткость материала повышается, т.е. ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ и $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$ смещаются вверх (положительная скоростная чувствительность).

4. С увеличением скорости деформирования деформация разрушения ε_* убывает (хрупкость повышается), а напряжение разрушения σ_* возрастает.

5. Кривые релаксации напряжения $\sigma(t, \bar{\varepsilon})$ при постоянной деформации $\bar{\varepsilon}$ убывают по t и являются выпуклыми вниз функциями.

6. С ростом $\bar{\varepsilon}$ кривая релаксации смещается вверх (т.е. $\sigma(t, \bar{\varepsilon})$ возрастает по $\bar{\varepsilon}$).

7. Кривая ползучести $\varepsilon(t, \bar{\sigma})$ при постоянном $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}$ возрастает с увеличением t .

8. С ростом $\bar{\sigma}$ кривая ползучести смещается вверх ($\varepsilon(t, \bar{\sigma})$ возрастает по $\bar{\sigma}$).

9. Имеет место эффект затухания памяти, т.е. асимптотическое поведение кривых релаксации и ползучести при $t \rightarrow \infty$ не зависит от конкретного характера изменения деформации или, соответственно, напряжения от нулевого до заданного постоянного значения на любом конечном интервале времени.

10. Кривая обратной ползучести монотонно убывает после полной разгрузки.

11. Кривая длительной прочности $t_*(\sigma)$ убывает ($t_*(\sigma)$ – время разрушения образца при $\sigma(t) = \text{const}$, $t > 0$), $t_*(\sigma) \rightarrow +\infty$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$ и $t_*(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \sigma_*$, где $\sigma_0 \geq 0$ – (условный) порог ползучести, $\sigma_* > 0$ – предел мгновенной прочности σ_* .

12. С ростом температуры деформативность увеличивается, т.е. кривая ползучести смещается вверх, а кривые длительной прочности, релаксации и деформирования – вниз; мгновенный модуль, предел текучести (если есть площадки текучести на ДД) и напряжение разрушения снижаются, скорости ползучести и релаксации повышаются.

Наличие этого (минимального) набора свойств у теоретических кривых релаксации, ползучести, обратной ползучести, длительной прочности и ДД при постоянных скоростях необходимо для феноменологической адекватности определяющего соотношения (для описания того класса материалов, который характеризуется указанным списком термомеханических эффектов). Именно из требования наличия свойств 1–12 обратной ползучести и длительной прочности можно вывести систему необходимых ограничений на материальные функции и параметры ОС (2) и любого другого ОС, претендующего на описание перечисленных эффектов. Для моделирования более широкого целевого списка эффектов, например, наблюдаемых при релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, ползучести при ступенчатых нагружениях, в процессе деформирования с кусочно-постоянными скоростями нагружения и деформации, при разгрузке и циклических программах нагружения, – могут потребоваться (или нет) дополнительные ограничения на свойства МФ [3, 4, 37, 38].

К ОС (2) применена техника качественного анализа определяющих соотношений для вязкоупругопластических материалов, разработанная ранее в цикле работ [1, 37–43] и двух десятков других (см. библиографию в литературе [3–5, 37, 43]), посвященных пяти разным ОС. Общие свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях, обратной ползучести, релаксации, деформирования с постоянной скоростью и длительной прочности, порождаемых ОС (2) с произвольными МФ, исследованы (и сопоставлены с экспериментальными) в работах [1–5]. В данной статье будут изучены

свойства диаграмм деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ с постоянной скоростью нагружения (СН) b . При этом нас будет интересовать не только условия наличия у теоретических ДД свойств 3 и 4, но и условия наличия или отсутствия некоторых дополнительных свойств ДД, характерных для различных (под)классов реономных материалов (опций): выпуклость ДД вверх или наличие у них точек перегиба; существование и форма мгновенной и равновесной ДД (предельных кривых семейства ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ при $b \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow 0 \pm 0$); конечность мгновенных модулей E_+ и E_- при растяжении и сжатии (т.е. предельных значений касательного модуля $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и $\varepsilon \rightarrow 0-$), их отличие от нуля и (не)зависимость E_+ и E_- от СН; наличие начального участка ДД, не зависящего от скорости нагружения; разномодульность ($E_- \neq E_+$) и зависимость всей ДД или только ее части вне заданной окрестности нуля от знака напряжения (*tension compression asymmetry*).

Например, выпуклость вверх ДД (вплоть до начала разрушения или до площадки текучести) типична для многих полимеров, асфальтобетонов и металлов и сплавов с заметной скоростной чувствительностью [22–25, 44–57]. Выпуклость вниз в окрестности нуля, малый, но быстро растущий касательный модуль характерны для экспериментальных диаграмм растяжения многих эластомеров (каучуков, резин и т.п.), пенопластов (пенополивинилхлорид, пенополиуретан), связок, сухожилий и других биологических тканей [58–63]. Многие металлы и сплавы при умеренных температурах, полимеры в стеклообразном состоянии и другие материалы проявляют заметную чувствительность к СН лишь при достаточно больших деформациях, по крайней мере, эту чувствительность трудно обнаружить по ДД при малых ε : их начальные линейные участки совпадают в том разрешении, с которым регистрируются ДД [44, 45, 48–51, 64–67]. Напротив, в испытаниях ряда материалов с выраженной скоростной чувствительностью (полимеры при достаточно высоких температурах, пластичные металлы и сплавы: медь, олово, алюминий, титановые и алюминиевые сплавы в сверхпластичном состоянии и режимах др.), зарегистрирована зависимость мгновенного модуля ДД от скорости нагружения (или деформирования) [22–25, 28, 45, 46, 52–55].

Кривые ползучести и релаксации, порождаемые ОС (2)

При $\sigma(t) = \text{const}$, $t > 0$ ОС (2) порождает семейство кривых ползучести:

$$\varepsilon(t, \sigma) = E^{-1}F(\sigma) + \eta^{-1}V(\sigma)t. \quad (8)$$

Если $V(\sigma) \neq 0$, то все кривые ползучести линейны по времени при $t > 0$, т.е. при любых МФ ОС (2) моделирует только ползучесть с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon}(t) = \eta^{-1}V(\sigma)$ (как и линейная модель Максвелла). ОС (2) не способно описывать стадии замедленной и ускоренной ползучести, а также – ограниченную ползучесть (свойственную, например, многим полимерам). Так как $V(x) > 0$ при $x > 0$ и $V(x)$ возрастает, то кривая (8) возрастает по t (при $\sigma > 0$) и по σ , что совпадает с типичными свойствами экспериментальных кривых ползучести структурно стабильных однородных материалов. Выраженная стадия установившейся ползучести характерна для многих пластичных металлов и полимеров в вязкотекучем состоянии (при достаточно высокой температуре).

В силу уравнения (8) зависимость скорости установившейся ползучести от напряжения полностью определяется МФ $V(x)/\eta$. В испытаниях стабильных материалов зависимость скорости установившейся ползучести $\dot{\varepsilon} = r(\sigma)$ от напряжения всегда является возрастающей и выпуклой вниз [18] при $\sigma > 0$, поэтому на $V(x)$ необходимо наложить дополнительное ограничение: $V(x)$ должна быть (нестрого) выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вверх при $x < 0$ (т.е. $V''(x)x \geq 0$, если $V''(x)$ существует).

Кривые релаксации ОС (1) – интегральные кривые $\sigma(t; \bar{\varepsilon}, t_0)$ уравнения (3) с заданной деформацией $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} = \text{const}$ при $t \geq t_0$:

$$E^{-1}F'(\sigma)\dot{\sigma} + \eta^{-1}V(\sigma) = 0, \\ \text{или } \dot{\sigma} = -\tau_r^{-1}g(\sigma), \quad (9)$$

где $t_0 \geq 0$ – продолжительность начальной стадии нагружения (*rise time*), т.е. стадии выхода деформации $\varepsilon(t)$ на постоянный уровень $\bar{\varepsilon} \neq 0$; $\tau_r = \eta/E > 0$ – время релаксации линейной модели Максвелла; $g(x) := V(x)/F'(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$.

Для индивидуализации конкретной кривой релаксации (КР) $\sigma(t, \bar{\varepsilon}; t_0, \sigma_0)$ необходимо, помимо значений $\bar{\varepsilon} \neq 0$ и $t_0 \geq 0$, задать начальное значение напряжения $\sigma_0 = \sigma(t_0) \neq 0$ (так, что $\sigma_0 \bar{\varepsilon} > 0$). Если $t_0 = 0$ (т.е. деформация счи-

тается мгновенной: $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} h(t)$), то $\sigma_0 = \sigma(0+)$ совпадает с упругим напряжением: $E \bar{\varepsilon} = F(\sigma_0)$ или $\sigma_0 = f(E \bar{\varepsilon})$, $f = F^{-1}$. Если $t_0 > 0$, то σ_0 зависит от истории $\varepsilon(t)$ при $t \in [0; t_0]$, и его вычисление требует использования ОС (2)–(3).

Если $|V(\sigma)| > 0$, то переменные в соотношении (9) разделяются, и можно выписать решение задачи Коши с произвольным начальным условием $\sigma(t_0) = \sigma_0 > 0$:

$$t - t_0 = -\tau_r \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{F'(x)}{V(x)} dx, \quad t \geq t_0, \\ \text{или } t = t_0 + \tau_r \int_{F(\sigma)}^{F(\sigma_0)} \frac{dy}{V(f(y))}. \quad (10)$$

Уравнение (10) задает семейство КР $\sigma = R(t; \bar{\varepsilon}, t_0)$, $t \geq t_0$ в неявном виде $t = r(\sigma; \bar{\varepsilon}, t_0)$ (с безразмерным временем t/τ_r), $\bar{\varepsilon}$ входит в соотношение (10) через начальное значение σ_0 .

Анализ неявного представления показывает, что при $\sigma_+ = 0$ все КР $\sigma = \sigma(t, \bar{\varepsilon})$ с $\bar{\varepsilon} > 0$ убывают по t и стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, а с ростом деформации $\bar{\varepsilon}$ смещаются вверх [5]. Если же $\sigma_+ > 0$ (и $V(x) \equiv 0$ на $[\sigma_-, \sigma_+]$, $\sigma_- \leq 0$), кривые релаксации ОС с произвольными $t_0 \geq 0$ и $\sigma_0 \notin [\sigma_-, \sigma_+]$ имеют при $t \rightarrow \infty$ ненулевое равновесное значение напряжения: $\sigma(t, \sigma_0) \rightarrow \sigma_+$ при $\sigma_0 > \sigma_+$ и $\sigma(t, \sigma_0) \rightarrow \sigma_-$ при $\sigma_0 < \sigma_-$ (при сжатии), т.е. ОС описывает поведение, характерное для твердых тел при длительном деформировании. А в случае $\sigma_+ = 0$ моделируемый материал принадлежит классу жидкостей, обычно характеризующему свойством полной релаксации $\sigma(\infty, \bar{\varepsilon}) = 0$ для всех $\bar{\varepsilon}$ [68].

При испытаниях стабильных материалов на релаксацию КР с $\bar{\varepsilon} > 0$ всегда выпуклы вниз, поэтому теоретические КР с $\bar{\varepsilon} > 0$ (или $\sigma_0 > 0$) должны быть выпуклы вниз, т.е. функция $\dot{\sigma}(t)$ должна возрастать ($\ddot{\sigma}(t) > 0$, если существует). В силу соотношения (9) это равносильно возрастанию функции $g(x) := V(x)/F'(x)$, а неравенство $g'(x) > 0$ равносильно неравенству $V'(x)F'(x) - V(x)F''(x) > 0$ [5]. Таким образом, требование выпуклости вниз всех кривых релаксации с $\bar{\varepsilon} > 0$ налагает дополнительное ограничение на материальные функции ОС (1):

$$V'(x)/V(x) > F''(x)/F'(x), \quad x \in (0, \omega_+), \\ \text{т.е. } [\ln V(x)]' > [\ln F'(x)]'. \quad (11)$$

Свойства теоретических диаграмм нагружения с постоянными скоростями

Для нагружения $\sigma(t) = bt$ с постоянной скоростью $b > 0$ ОС (2) дает отклик

$$\varepsilon(t, b) = E^{-1}F(bt) + \eta^{-1} \int_0^t V(b\tau) d\tau.$$

Заменой $x = b\tau$, $\sigma = bt$ получим уравнение семейства диаграмм деформирования:

$$\varepsilon(\sigma, b) = E^{-1}F(\sigma) + (b\eta)^{-1}Y(\sigma), \quad (12)$$

$$Y(\sigma) := \int_0^\sigma V(x) dx, \quad b, \sigma > 0.$$

В частности, для полулинейной модели (5) уравнение (12) принимает вид

$$\varepsilon(\sigma, b) = E^{-1}\sigma + E^{-1}(\tau, b)^{-1}(n+1)^{-1}\sigma^{n+1}.$$

Выразить σ через ε из соотношения (12) в явном виде и получить уравнение ДД в привычной форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ можно только для специально подобранных пар МФ. Однако для исследования всех основных качественных свойств семейства ДД $\sigma(\varepsilon, b)$, порождаемых ОС (2) с произвольными МФ, вполне достаточно уравнения (12) (в обратной форме) или параметрического представления ДД через t .

Если $\sigma_+ > 0$ и $V(x) = 0$ при $x \in [0; \sigma_+]$ (по определению, σ_+ – верхняя грань множества нулей МФ $V(x)$), то при $\sigma < \sigma_+$ $Y(\sigma) \equiv 0$, и потому ДД (12) имеет вид $\varepsilon(\sigma, b) = E^{-1}F(\sigma)$. Таким образом, модель описывает поведение нелинейно упругого материала, а диссипация энергии и зависимость ДД от скорости нагружения (СН) отсутствуют. При $\sigma > \sigma_+$ $V(x) > 0$, $Y(\sigma) > 0$, и потому ДД зависят от СН. Так как $Y(\sigma) > 0$, то семейство ДД (12) убывает по b при $\sigma > \sigma_+$ (с ростом скорости нагружения жесткость материала повышается, ДД $\varepsilon(\sigma, b)$ смещается вниз, ДД в форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ – вверх). Скорость убывания ДД (12) по b равна $\partial\varepsilon/\partial b = -kb^{-2}Y(\sigma) < 0$, $k := \eta^{-1}$; ее модуль растет с увеличением σ и пропорционален норме $kY(\sigma)$ МФ $kV(x)$ в пространстве $L_1[0, \sigma]$. В частности, увеличение МФ $kV(x)$ при $x \in [0, \sigma]$, т.е. переход к материалу с меньшей вязкостью, влечет рост $\varepsilon(\sigma, b)$ (смещение вниз $\sigma(\varepsilon, b)$) и усиление зависимости ДД от скорости нагружения.

Для любого $\sigma \geq 0$ семейство ДД (12) сходится при $b \rightarrow \infty$ к функции $\varepsilon = E^{-1}F(\sigma)$, и потому семейство $\sigma(\varepsilon, b)$ сходится к функции

$\sigma = f(E\varepsilon)$, где $f := F^{-1}$ – обратная функция (т.е. кривая мгновенного нагружения имеет вид $\sigma = f(E\varepsilon)$ и не зависит от МФ V). Сходимость равномерна на любом конечном отрезке $[0, \bar{\sigma}]$: $|\varepsilon(\sigma, b) - E^{-1}F(\sigma)| = b^{-1}kY(\sigma) \leq b^{-1}kY(\bar{\sigma})$ (так как $Y(\sigma)$ не убывает: $Y'(\sigma) = V(x) \geq 0$). К этой же кривой сходится и семейство изохронных КП при $t \rightarrow 0+$.

При $b \rightarrow 0+$ $\varepsilon(\sigma, b) \rightarrow +\infty$ при любом фиксированном $\sigma > \sigma_+ \geq 0$ (любом $\sigma > 0$, если $\sigma_+ = 0$). Это означает, что при $b \rightarrow 0+$ семейство ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ сходится к постоянной функции $\sigma(\varepsilon) = \sigma_+ \geq 0$ при любом фиксированном $\varepsilon > \varepsilon_+$, где $\varepsilon_+ := E^{-1}F(\sigma_+)$. То есть в случае $\sigma_+ > 0$ семейство ДД сходится на луче $\varepsilon \geq 0$ к диаграмме упругопластического материала с пределом текучести $\sigma_y = \sigma_+$ и начальным участком $\sigma = f(E\varepsilon)$ при $\varepsilon \leq \varepsilon_+$ (при $\sigma_y = \sigma_-$), а в случае $\sigma_+ = 0$ сходится к $\sigma \equiv 0$ при $\varepsilon \geq 0$. Таким образом, равновесная диаграмма растяжения модели имеет существенно различный вид в случаях $\sigma_+ = 0$ или $\sigma_+ > 0$ (как и кривая релаксации [5]).

Исследуем общие свойства ДД с фиксированной скоростью нагружения при $\sigma > \sigma_+ \geq 0$. Так как $F(0) = 0$, то $\varepsilon(0, b) = 0$. Продифференцируем (12):

$$\partial\varepsilon/\partial\sigma = E^{-1}F'(\sigma) + E^{-1}(\tau, b)^{-1}V(\sigma), \quad (13)$$

$$\partial^2\varepsilon/\partial^2\sigma = E^{-1}F''(\sigma) + E^{-1}(\tau, b)^{-1}V'(\sigma);$$

$$\partial\sigma/\partial\varepsilon = E[F'(\sigma) + (\tau, b)^{-1}V(\sigma)]^{-1},$$

$$\partial^2\sigma/\partial^2\varepsilon = -E^2[F''(\sigma) + (\tau, b)^{-1}V'(\sigma)] \times [F'(\sigma) + (\tau, b)^{-1}V(\sigma)]^{-3}. \quad (14)$$

Так как $F'(x) > 0$ и $V(x) \geq 0$, то $\partial\varepsilon/\partial\sigma > 0$ при фиксированном $b > 0$, и $\varepsilon(\sigma, b)$ возрастает по σ при любых $\sigma, b > 0$ (уравнение (12) верно и при $\sigma, b < 0$, и ДД возрастают и в этом случае, так как $xV(x) \geq 0$). Если $F''(x) \geq 0$ при $x > 0$, то из выражения (13) следует $\partial^2\varepsilon/\partial^2\sigma \geq 0$ при всех $\sigma > 0$ (в силу ограничения $V'(x) \geq 0$) и ДД (12) с $b > 0$ (нестрого) выпуклы вниз (относительно направления оси ε) при $\sigma > 0$; строгое неравенство $\partial^2\varepsilon/\partial^2\sigma > 0$ выполняется во всех точках σ , в которых $F''(\sigma) > 0$ или $V'(\sigma) > 0$, в частности, при $\sigma > \sigma_+$ (рис. 1, а). Например, для полулинейной модели $F''(\sigma) \equiv 0$ и $V'(\sigma) > 0$ при $\sigma > 0$, и потому ДД (12) выпукла вверх при $\sigma > 0$.

Из обнаруженных свойств семейства ДД (12) в форме $\varepsilon(\sigma, b)$ следуют свойства

ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$: 1) $\sigma(\varepsilon, b)$ возрастают по ε ; 2) $\sigma(0, b) = 0$; 3) с ростом СН b ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ смещается вверх при любом $\varepsilon > 0$, т.е. ОС моделирует положительную скоростную чувствительность материалов (возрастание жесткости с ростом скорости); 4) при $b \rightarrow \infty$ $\sigma(\varepsilon, b)$ сходится к функции $\sigma = f(E\varepsilon)$, $f := F^{-1}$ (равномерно на любом отрезке оси ε); 5) при $b \rightarrow 0$ семейство ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ сходится к постоянной функции $\sigma(\varepsilon) = \sigma_+ \geq 0$ при любом фиксированном $\varepsilon > \varepsilon_+$, где $\varepsilon_+ := E^{-1}F(\sigma_+)$; 6) если $F''(x) \geq 0$, то ДД выпуклы вверх на полуоси $\varepsilon > 0$ при всех $b > 0$, и касательный модуль $\partial\sigma / \partial\varepsilon = E[F'(\sigma) + (\tau_r b)^{-1}V(\sigma)]^{-1}$ убывает с ростом ε . Последнее свойство следует из леммы: функция, обратная к возрастающей и выпуклой вниз, возрастает и выпукла вверх. Выпуклость вверх ДД (вплоть до начала разрушения или до площадки текучести) характерна для многих полимеров, асфальтобетонов, металлов и сплавов со скоростной чувствительностью [22–25, 44–57].

На рис. 1, а приведены ДД для модели с МФ $F(x) = A(e^{\lambda x} - 1)$, $A, \lambda > 0$ (тогда обратная функция $f(y) = \lambda^{-1} \ln(1 + A^{-1}y)$) и $V = x^n$ с $n = 2$, $A = \lambda = 1$, $E = 100$, $\eta = 100$ для СН $b = 1 \cdot 10^i$, $i = -4; -3; -2; -1; 0$ (ДД со стрелками) и $b = 0, 2; 0, 3$. Штриховая кривая – предельная ДД $\varepsilon = E^{-1}F(\sigma)$ при $b \rightarrow \infty$.

На рис. 1, б – те же ДД, но в форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$. Так как $F''(x) > 0$, то все ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ выпуклы вверх. Штриховая кривая – предельная ДД

$\sigma = f(E\varepsilon)$ при $b \rightarrow \infty$ (т.е. $\sigma = \lambda^{-1} \ln(1 + EA^{-1}\varepsilon)$). При $b \rightarrow 0$ $\varepsilon(\sigma, b) \rightarrow +\infty$ для всех $\sigma > 0$, а $\sigma(\varepsilon, b) \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon \geq 0$. По осям отложены безразмерные напряжение и деформация: качественные свойства ДД не зависят от их масштабирования.

В случае, когда $F''(x) < 0$ на некотором интервале I , слагаемые в формуле (13) для второй производной имеют разные знаки, и возможны наличие точки перегиба $\tilde{\sigma}(b) \in I$ у ДД (12) и выпуклость вниз ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ при достаточно малых $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}(b)$. Эти свойства (выпуклость вниз в окрестности нуля, малый, но быстро растущий касательный модуль, наличие точки перегиба) присущи кривым растяжения многих эластомеров (каучуков, резин и т.п.), пенопластов и биологических тканей (связок, сухожилий, сосудов и т.п.) [58–63].

Точка перегиба ДД (12) находится из условия $\partial^2\varepsilon / \partial^2\sigma = 0$, т.е.

$$\tau_r b F''(\sigma) + V'(\sigma) = 0. \quad (15)$$

Второе слагаемое не зависит от СН, и при любом заданном $\sigma_0 \in I$ решение $\tilde{\sigma}(b)$ уравнения можно совместить с σ_0 за счет выбора СН $b_0 = -\tau_r^{-1}V'(\sigma_0) / F''(\sigma_0)$; при $b \in (0; b_0)$ $\partial^2\varepsilon / \partial^2\sigma > 0$ в точке σ_0 , а при $b > b_0$ будет $\partial^2\varepsilon / \partial^2\sigma < 0$ в точке σ_0 .

Например, для модели с МФ $F = x^m$, $m \in (0; 1)$, $V = x^n$, $n > 0$, будет $F''(x) = m(m-1)x^{m-2} < 0$ при $x > 0$, и урав-

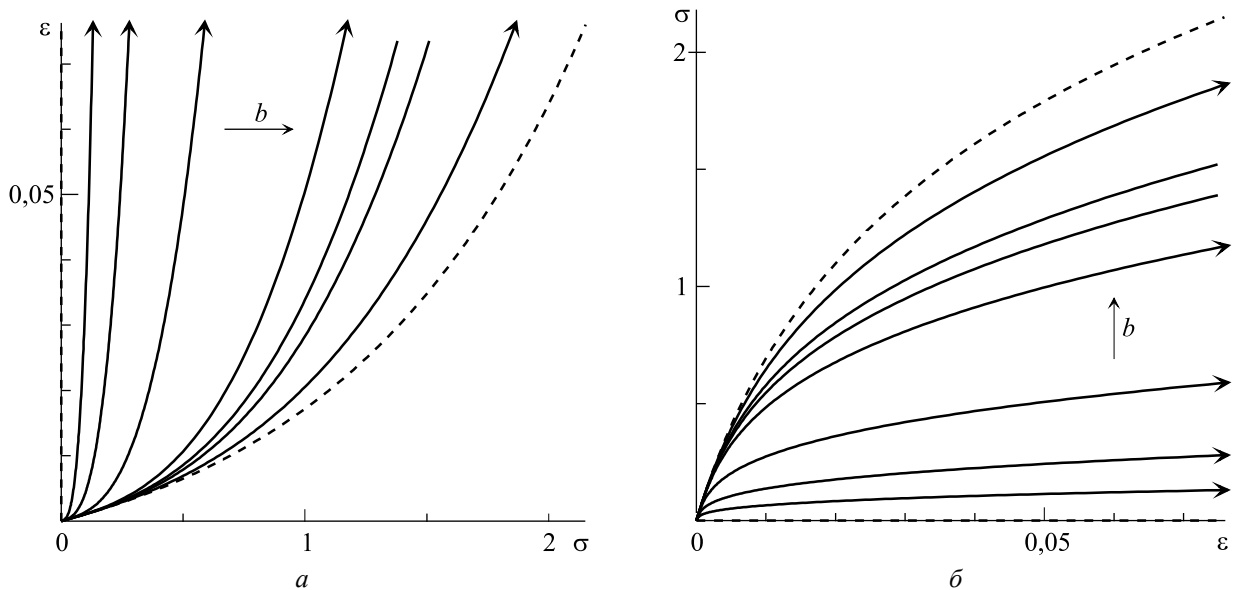


Рис. 1. Кривые нагружения модели с МФ $F(x) = A(e^{\lambda x} - 1)$, $A, \lambda > 0$, $V = x^n$, $n > 1$, с различными скоростями $b = 0, 0001; 0, 001; 0, 01; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 1, 0$:

$a - \varepsilon = \varepsilon(\sigma, b)$, $b - \sigma = \sigma(\varepsilon, b)$. Вектор – направление смещения кривых с ростом скорости нагружения

нение для точки перегиба имеет вид $\sigma^{m-2}[\tau_r b m(m-1) + n\sigma^{n-m+1}] = 0$. Его единственное решение – $\tilde{\sigma} = [\tau_r b m(1-m)n^{-1}]^{1/(n-m+1)}$ (при $m < 1$). Так как $n-m+1 > 0$, то $\tilde{\sigma}$ возрастает с ростом СН, τ_r , n^{-1} и $\tilde{\sigma}(b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow 0$. Таким образом, каждая ДД (12) с $b > 0$ ($\varepsilon(\sigma, b) = E^{-1}\sigma^m + E^{-1}(n+1)^{-1}(\tau_r b)^{-1}\sigma^{n+1}$) имеет точку перегиба $\tilde{\sigma}(b)$, выпукла вверх на $(0; \tilde{\sigma})$ и выпукла вниз при $\sigma > \tilde{\sigma}$; тогда (в силу возрастания ДД) каждая ДД в форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ имеет точку перегиба $\tilde{\varepsilon}(b)$, выпукла вниз при $\varepsilon \in (0; \tilde{\varepsilon})$ и выпукла вверх при $\varepsilon > \tilde{\varepsilon}$, а $\tilde{\varepsilon}(b) = \varepsilon(\tilde{\sigma}(b), b)$ возрастает с ростом СН и параметров τ_r и n^{-1} (так как $\varepsilon(\sigma, b)$ возрастает по обоим аргументам).

На рисунке 2 приведены ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ степенной модели с $m = 0,5 < 1$, $n = 1$, $\eta = 10$, $E = 10$, $\tau_r = 1$ для разных СН, пробегающих три порядка: $b = 1 \cdot 10^i; 2 \cdot 10^i; 3 \cdot 10^i$, $i = -4; -3; -2; -1$ (ДД для $b = 1 \cdot 10^i$ помечены стрелками). С ростом СН ветвь нагрузки смещается вверх. Штриховая ДД – предельная кривая $\sigma = f(E\varepsilon)$, $f := F^{-1} = y^{1/m}$, при $b \rightarrow \infty$. Штрих-пунктирная кривая – геометрическое место точек перегиба $(\tilde{\varepsilon}(b), \tilde{\sigma}(b))$ ДД при различных $b > 0$, ее пересечение с конкретной ДД – точка перегиба последней. Кривая $\{(\tilde{\varepsilon}(b), \tilde{\sigma}(b)) | b > 0\}$ не зависит от величин параметров η и τ_r , так как $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\varepsilon}$ зависят от параметра $\tau_r b$, а η входит только в него.

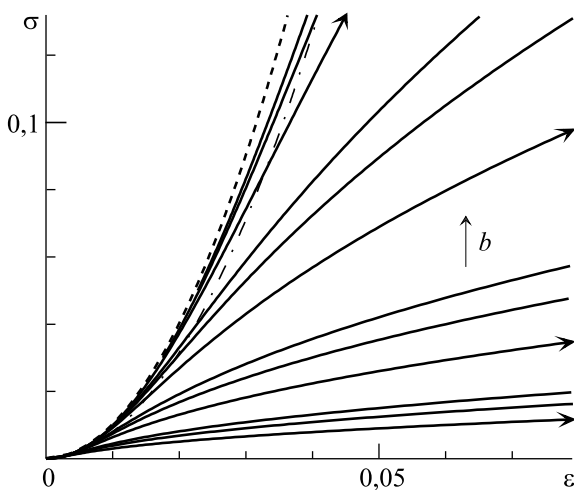


Рис. 2. Кривые нагружения модели с МФ
 $F = x^m$, $m \in (0; 1)$, $V = x^n$, $n > 0$, для скоростей
 $b = 1 \cdot 10^i; 2 \cdot 10^i; 3 \cdot 10^i$, $i = -4; -3; -2; -1$:
 - - - - - предельная кривая $\sigma = f(E\varepsilon)$, $f = y^{1/m}$,
 при $b \rightarrow \infty$; - · - · - · - геометрическое место точек
 перегиба ДД при $b > 0$

Касательный модуль ДД (12) $\partial\sigma / \partial\varepsilon = E \times [F'(\sigma) + (\tau_r b)^{-1}V(\sigma)]^{-1}$ зависит от СН (возрастает по b), но его предельные значения при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и $\varepsilon \rightarrow 0-$ (мгновенные модули при растяжении и сжатии E_+ и E_-) не зависят от СН и МФ V (так как $\sigma(0+, b) = 0$, $\sigma(0-, b) = 0$ и $V(0) = 0$):

$$\begin{aligned} \partial\sigma / \partial\varepsilon|_{\varepsilon=0+} &= E F'(0+)^{-1} = E f'(0+), \\ \partial\sigma / \partial\varepsilon|_{\varepsilon=0-} &= E F'(0-)^{-1} = E f'(0-). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, все ДД имеют общую касательную (с угловым коэффициентом $E_+ := E f'(0+)$) в точке $\varepsilon = 0+$, а если $F'(0+) \neq 0$ и $F'(0+) \neq \infty$, то $E_+ < \infty$ и $E_+ \neq 0$, и все ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ и $\varepsilon(\sigma, b)$ имеют линейную асимптотику в нуле, не зависящую от СН: $\sigma(\varepsilon, b) = E_+ \varepsilon + o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и $\varepsilon(\sigma, b) = E_+^{-1} \sigma + o(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow 0+$. При $E_+ = 0$ главный член асимптотики любой ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ имеет второй порядок малости и зависит от СН и МФ V (см. (14)). Если $F'(0-) = F'(0+)$ (в частности, для нечетной МФ F), то $E_- = E_+$.

При испытаниях ряда материалов с выраженной скоростной чувствительностью (полимеры при достаточно высоких температурах, пластичные металлы и сплавы: медь, олово, алюминий, титановые сплавы в сверхпластичном состоянии и др.) была зарегистрирована зависимость мгновенного модуля от скорости нагружения (или деформирования) [22–25, 28, 45, 46, 52–55]. Нелинейное ОС (1) (так же как и линейное ОС вязкоупругости [37]) не может описать этот эффект. Это один из индикаторов области его (не)применимости по кривым испытаний материалов – наряду с такими атрибутивными свойствами ОС (1), как постоянная скорость ползучести, незатухающая память, неспособность описывать восстановление после полной разгрузки (в частности, обратную ползучесть), зависимость кривых ползучести при ступенчатых нагружениях и накопленной пластической деформации от перестановки предшествующих ступеней нагружения, уменьшение скорости накопления пластической деформации и приспособляемость при несимметричных циклических нагружениях [3] и т.п.

Тем не менее, обнаруженное свойство независимости мгновенного модуля ДД ОС (1) от СН отражает наблюдаемое в испытаниях большинства материалов явление: многие металлы и сплавы при умеренных температурах, полимеры в стеклообразном состоянии и другие ма-

териалы проявляют заметную чувствительность к СН лишь при достаточно больших деформациях, по крайней мере, эту чувствительность трудно обнаружить по экспериментальным ДД при малых ε : их начальные линейные участки совпадают в том разрешении, с которым регистрируются ДД [44, 45, 48–51, 64–67].

Задание ненулевого предела упругости σ_+ и МФ $V(x) \equiv 0$ при $x \in [0, \sigma_+]$ позволяет обеспечить не только совпадение мгновенных модулей (касательных в точке $\varepsilon = 0$) всех ДД, но и точное совпадение начальных участков всех ДД с любыми СН при $\sigma \leq \sigma_+$ (с кривой $\sigma = f(E\varepsilon)$, $\varepsilon \leq \varepsilon_+$, где $\varepsilon_+ := E^{-1}F(\sigma_+)$).

Рассмотрим для иллюстрации модель с материальными функциями

$$\begin{aligned} V(x) &\equiv 0, \quad x \in [\sigma_-, \sigma_+], \\ V &= A_+(x - \sigma_+)^n \quad \text{при } x > \sigma_+, \\ V &= -A_- |x - \sigma_-|^m \quad \text{при } x < \sigma_-, \\ F(x) &= x + \gamma V(x), \end{aligned} \quad (17)$$

где $A_+, A_- > 0$, $m, n \geq 1$, $\gamma \geq 0$.

Условие $\gamma \geq 0$ обеспечивает выполнение ограничений $F'(x) > 0$ и $F(0) = 0$ на МФ F , если они выполнены для V (для МФ (17) они выполнены); критерий выпуклости КР (11) выполняется при всех $n, m > 0$. При $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$ эта модель описывает линейно упругий материал с модулем упругости E (при растяже-

нии и сжатии), а при $\sigma \notin [\sigma_-, \sigma_+]$ проявляются реономные свойства и разнсопротивляемость (если $\sigma_- \neq -\sigma_+$, или $A_- \neq A_+$, или $m \neq n$). В уравнении ДД (12) $Y(\sigma) = 0$ при $\sigma \in [0, \sigma_+]$ и $Y(\sigma) = A_+(n+1)^{-1}(\sigma - \sigma_+)^{n+1}$ при $\sigma > \sigma_+$, поэтому ДД имеет вид

$$\varepsilon(\sigma, b) = E^{-1}[\sigma + \gamma V(\sigma)] \quad \text{при } \sigma \in [0, \sigma_+],$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E^{-1}[\sigma + \gamma A_+(\sigma - \sigma_+)^n + \\ &+ A_+(n+1)^{-1}(\sigma - \sigma_+)^{n+1}(\tau_r b)^{-1}] \quad \text{при } \sigma > \sigma_+. \end{aligned}$$

На рис. 3, а приведены ДД $\sigma(\varepsilon; b)$ модели (17) с $\sigma_+ = 0,1$, $n = 2$, $A_+ = 1$, $\eta = 10$, $E = 10$, $\tau_r = 1$, $\gamma = 0$ ($F(x) = x$) для различных СН, пробегаящих пять порядков: $b = 0,1^i$, $i = 6; 5; 4; 3; 2; 1$. У всех ДД есть общий прямолинейный участок $\sigma = E\varepsilon$, $\varepsilon \leq \varepsilon_+$, $\varepsilon_+ := E^{-1}F(\sigma_+) = E^{-1}\sigma_+$, не зависящий от СН. При $\sigma > \sigma_+$ ДД зависят от СН и с ростом b смещаются вверх. Штриховая прямая – предельная ДД $\sigma = E\varepsilon$ при $b \rightarrow \infty$. При $b \rightarrow 0$ $\sigma(\varepsilon, b) \rightarrow \sigma_+$ для любого $\varepsilon \geq \varepsilon_+$ ($\sigma = \sigma_+$ – горизонтальная штриховая прямая), то есть семейство ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ сходится при всех $\varepsilon > 0$ к диаграмме идеального упругопластического материала с пределом текучести (при растяжении) $\sigma_y = \sigma_+$.

На рис. 3, б приведены ДД модели (17) с $\gamma = 5$, $\sigma_+ = 0,1$, $n = 2$, $A_+ = 1$, $\eta = 10$, $E = 10$, $\tau_r = 1$ для $b = 0,001; 0,003; 0,005; 0,010$ (эти ДД качественно схожи с экспериментальными

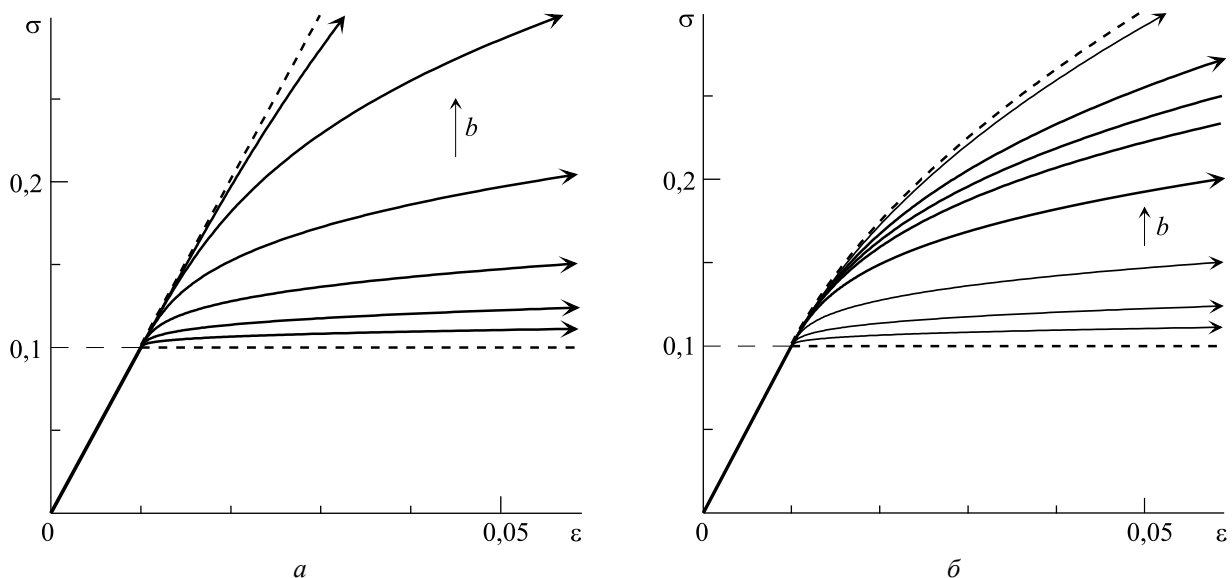


Рис. 3. Диаграммы нагружения модели (17) с $\sigma_+ > 0$ при $b = 0,1^i$, $i = 6; 5; 4; 3; 2; 1$:
 а – для модели (17) с $\gamma = 0$; б – для модели (17) с $\gamma = 5$ (дополнительно – ДД с $b = 0,003; 0,005$);
 ----- предельная ДД $\sigma = E\varepsilon$ при $b \rightarrow \infty$;
 вектор – направление смещения ДД с ростом скорости нагружения

ми ДД полимеров в стеклообразном состоянии и многих сплавов [44, 45, 48–51, 64–67]) и $b = 0,1^i$, $i = 6; 5; 4; 1$. Так как $\gamma > 0$, ДД мгновенного нагружения (при $b \rightarrow \infty$) не прямолинейна при $\sigma > \sigma_+$ (штриховая кривая).

В заключение выясним, при каких условиях ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ ограничены, т.е. имеют горизонтальные асимптоты и моделируют материал, склонный к течению (быстрому нарастанию деформации) при постоянном (растягивающем) напряжении. Это свойство равносильно наличию вертикальной асимптоты у ДД в форме (12), т.е. наличию асимптоты $x = \omega_+$ у одной из МФ $F(x)$ или $V(x)$: либо $F(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \omega_+ - 0$, либо $V(x) \rightarrow \infty$ и $Y(\sigma) \rightarrow \infty$ (т.е. несобственный интеграл $Y(\bar{\sigma})$ в выражении (12) расходится). В этом случае у всех ДД (12) (при любом b) есть общая вертикальная асимптота $\sigma = \omega_+$, а у всех ДД в форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ есть горизонтальная асимптота $\sigma = \omega_+$, не зависящая от скорости нагружения. Если же указанный критерий не выполняется, то ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ не обладают горизонтальными асимптотами. В работе [1] доказано, что ДД ОС (1) при постоянных скоростях деформирования $\dot{\varepsilon} = a$ ведут себя иначе: ДД $\sigma(\varepsilon, a)$ всегда имеют горизонтальные асимптоты $\sigma = \bar{\sigma}$, где $\bar{\sigma}$ зависит от a ($V(\bar{\sigma}) = a\eta$), и потому ОС (2) моделирует течение при постоянном напряжении $\bar{\sigma}(a)$, характерное, в частности, для полимеров в вязкотекучем состоянии, алюминиевых и титановых сплавов при достаточно высоких температурах и материалов в состоянии сверхпластичности.

Все обнаруженные общие свойства ДД при растяжении справедливы и для ДД при сжатии, т.е. при $b < 0$ (после естественной редакции: замены $b \rightarrow 0+$ на $b \rightarrow 0-$ и $\sigma_+ \geq 0$ на $\sigma_- \leq 0$ и т.п.). Отметим, что многие свойства ДД нелинейного ОС (2) аналогичны свойствам ДД линейного интегрального ОС вязкоупругости [37, 42]. Но, в отличие от ДД линейного ОС, которые всегда выпуклы вверх, ДД ОС (2) могут иметь участки выпуклости вниз (в частности, в окрестности нуля) и точки перегиба; мгновенная и равновесная диаграммы ОС (2) уже не обязательно прямолинейны (формой первой управляет МФ F , а второй – параметр σ_+ и МФ F , если $\sigma_+ > 0$); зависимость ДД от скорости нагружения b не линейна и может быть существенно различной при растяжении и сжатии.

Выводы

В статье продолжен качественный анализ нелинейного определяющего соотношения типа Максвелла (2) для нестареющих вязкоупругопластичных материалов. Выведено в общем виде уравнение семейства диаграмм деформирования (ДД) с постоянными скоростями нагружения (12), порождаемых ОС (2), детально изучены его общие качественные свойства в зависимости от свойств двух материальных функций (МФ) и скорости нагружения. В результате сопоставления обнаруженных свойств теоретических кривых нагружения, ползучести и релаксации, порождаемых ОС (2), с типичными свойствами кривых квазистатических испытаний структурно стабильных реономных материалов, выявлены необходимые ограничения на МФ, обеспечивающие адекватное качественное описание комплекса основных эффектов, наблюдаемых при нагружениях с постоянной скоростью, и ряд индикаторов (не)применимости ОС (2). Выявлены реологические эффекты, которые ОС (2) принципиально не может описать ни при каких МФ (например, отрицательная скоростная чувствительность ДД, зависимость мгновенного модуля от скорости нагружения, затухание памяти, ползучесть с непостоянной скоростью и др.), и те, которые могут быть описаны при определенных дополнительных ограничениях, наложенных на МФ: выпуклость ДД вверх или наличие у них точек перегиба, существование и форма мгновенной и равновесной ДД, конечность мгновенного модуля, наличие начального участка ДД, не зависящего от скорости нагружения, разномодульность и зависимость всей ДД (или только ее части вне заданной окрестности нуля) от знака напряжения и др.

В частности, при минимальных ограничениях на две МФ ($F(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$, – непрерывная, (строго) возрастающая функция с кусочно-непрерывной производной, $V(x)$ – непрерывная, (нестрого) возрастающая функция на интервале (ω_-, ω_+) , $V(0) = 0$, $F(0) = 0$), доказаны следующие свойства диаграмм растяжения $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ с постоянной скоростью нагружения $b > 0$:

1) для любого b $\sigma(0, b) = 0$ и ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ возрастает по ε на луче $\varepsilon \geq 0$;

2) с ростом скорости b ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ смещается вверх при любом $\varepsilon > 0$, т.е. ОС (2) моделирует положительную скоростную чувствительность материалов (возрастание жесткости с ростом $|b|$);

3) мгновенный модуль при растяжении (и при сжатии) (16) не зависит от b и МФ V (т.е. все ДД имеют общую касательную в точке $\varepsilon = 0+$);

4) при $b \rightarrow \infty$ семейство ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ сходится на луче $\varepsilon \geq 0$ к кривой $\sigma = f(E\varepsilon)$, $f := F^{-1}$ (равномерно на любом отрезке оси ε);

5) при $b \rightarrow 0+$ семейство ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ сходится к постоянной функции $\sigma(\varepsilon) = \sigma_+ \geq 0$ (σ_+ – верхняя грань множества нулей МФ $V(x)$) на луче $\varepsilon \geq \varepsilon_+$, где $\varepsilon_+ := E^{-1}F(\sigma_+)$, а при $\varepsilon \in [0; \varepsilon_+]$ – к функции $\sigma = f(E\varepsilon)$; в случае $\sigma_+ = 0$ семейство ДД сходится к $\sigma \equiv 0$ при всех $\varepsilon \geq 0$;

6) если $\sigma_+ > 0$ и $V(x) \equiv 0$ при $x \in [0, \sigma_+]$, то ОС (2) моделирует упругое поведение при $\sigma \in [0; \sigma_+]$ и все ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ совпадают на начальном участке $\varepsilon \in [0; \varepsilon_+]$ с кривой мгновенного (упругого) деформирования $\sigma = f(E\varepsilon)$;

7) если $F''(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, то все ДД выпуклы вверх на полуоси $\varepsilon > 0$ при всех $b > 0$ (касательный модуль $\partial\sigma / \partial\varepsilon$ (см. (14)) убывает с ростом ε);

8) в случае, когда $F''(x) < 0$ на некотором интервале I , возможны наличие точки перегиба $\tilde{\sigma}(b) \in I$ у ДД (12) ($\tilde{\sigma}(b)$ – корень уравнения (15)) и выпуклость вниз ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ при достаточно малых $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}(b)$.

Из свойств 5) и 6) следует, что равновесная диаграмма растяжения ОС (2) имеет существенно разный вид в случаях $\sigma_+ = 0$ (когда $|V(x)| > 0$ при $x \neq 0$) или $\sigma_+ > 0$ (когда $V(x) \equiv 0$ при $x \in [0, \sigma_+]$): в случае $\sigma_+ = 0$ семейство ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ сходится при $b \rightarrow 0+$ к нулю на всем луче $\varepsilon \geq 0$, а в случае $\sigma_+ > 0$ семейство ДД сходится к диаграмме упруго-пластического материала с пределом текучести $\sigma_y = \sigma_+$ и начальным участком $\sigma = f(E\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_+]$. Тем самым, выявлена еще одна зона влияния параметра σ_+ и еще один аспект его физического смысла: σ_+ не только предел упругости при растяжении, порог ползучести и равновесное значение напряжения при релаксации [5], но σ_+ равен равновесному напряжению течения при медленном растяжении, постоянному значению, к которому сходится семейство ДД при $b \rightarrow 0+$, или «пределу текучести» предельной диаграммы.

Все обнаруженные общие свойства ДД при растяжении справедливы и для ДД при сжатии, т.е. при $b < 0$ (и $\sigma < 0$): в пунктах 1), 2), 4), 7), 8) надо лишь заменить знаки всех неравенств на обратные и выпуклость вверх на

выпуклость вниз; а в пунктах 5) и 6) заменить $b \rightarrow 0+$ на $b \rightarrow 0-$, $\sigma_+ \geq 0$ на $\sigma_- \leq 0$, $\varepsilon_+ \geq 0$ на $\varepsilon_- := E^{-1}F(\sigma_-) \leq 0$, отрезок $[0; \varepsilon_+]$ на $[\varepsilon_-; 0]$, $[0, \sigma_+]$ на $[\sigma_-; 0]$. Параметр $\sigma_- \leq 0$ (нижняя грань множества нулей МФ $V(x)$) имеет при сжатии такой же физический смысл, как σ_+ при растяжении.

Заключение

Проведенный в статье (и работах [1–5]) анализ позволил очертить круг реологических явлений (которые ОС (2) может адекватно описывать), выявить зоны влияния обеих МФ и показать, что ОС (2) может применяться для описания поведения широкого класса вязкоупругопластичных материалов, обладающих наследственностью, высокой положительной чувствительностью к скорости деформирования и, возможно, разносопротивляемостью (например, полимеров, их расплавов и растворов, композитов, твердых топлив, асфальтобетонов, титановых и алюминиевых сплавов в состоянии, близком к сверхпластичности, углеродных и керамических материалов при высоких температурах и т.п.).

В дальнейшем будет проведено исследование качественных свойств остальных квазистатических теоретических кривых ОС (2): кривых релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, диаграмм деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях деформации (в частности, кривых нагружения-разгрузки), откликов на циклические программы нагружения, условий описания рэтчинга и приспособляемости («shakedown»), эффектов Баушингера, Маллинза и др. Такой анализ позволит дополнить список индикаторов применимости ОС (2) и его возможностей по моделированию комплексного поведения классов реономных материалов.

Список литературы

1. Хохлов А.В. Нелинейные модели вязкоупругости типа Максвелла. Особенности их поведения, скоростная чувствительность и возможность использования для описания ползучести и сверхпластичности материалов. Отчет о НИР № 5193. НИИ механики МГУ им. Ломоносова. 2013. – 108 с.
2. Хохлов А.В. Свойства нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла с двумя материальными функциями // Вест-

- ник МГУ. Сер.1. Математика, механика. 2016. № 6. С. 36–41.
3. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях и условия накопления пластической деформации // Машиностроение и инженерное образование. 2016. № 3. С. 35–48.
4. Хохлов А.В. Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2016. № 3. С. 524–543.
5. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства семейства кривых релаксации и ограничения на материальные функции // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2017 (в печати)
6. Ильюшин А.А., Огибалов П.М. Некоторое обобщение моделей Фойгта и Максвелла // Механика полимеров. 1966. № 2. С. 190–196.
7. Городцов В.А., Леонов А.И. О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязкоупругости // ПММ. 1968. Т. 32. № 1. С. 70–94.
8. Theoretical and experimental investigations of shearing in elastic polymer liquids / A.I. Leonov, E.Ch. Lipkina, E.D. Paskhin, A.N. Prokunin // Rheol. Acta. 1976. Vol. 15. No 7/8. P. 411–426.
9. Пальмов В.А. Реологические модели в нелинейной механике деформируемых тел // Успехи механики. 1980. Т. 3. № 3. С. 75–115.
10. Прокунин А.Н. О нелинейных определяющих соотношениях максвелловского типа для описания движения полимерных жидкостей // ПММ. 1984. Т. 48. № 6. С. 957–965.
11. Larson R.G. Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions. Butterworth: Boston, 1988. – 364 p
12. Leonov A.I. Analysis of simple constitutive equations for viscoelastic liquids // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1992. Vol. 42. No 3. P. 323–350.
13. Leonov A.I., Prokunin A.N. Non-linear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer Fluids. London: Chapman and Hall, 1994. – 475 p.
14. Leonov A.I. Constitutive equations for viscoelastic liquids: Formulation, analysis and comparison with data // Rheology Series. 1999. Vol. 8. P. 519–575.
15. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. – 752 с.
16. Малинин Н.Н. Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. – 221 с.
17. Betten J. Creep Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 367 p.
18. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. – 504 с.
19. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the Constitutive Equation for Uniaxial Creep of a Power-Law Material through Instrumented Microindentation Testing and Modeling // Materials Transactions. 2014. Vol. 55. No 2. P. 275–284.
20. Бровман М.Я. О деформации ползучести при продольном изгибе балок // Известия РАН. МТТ. 2014. № 4. С. 121–129.
21. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. – 310 с.
22. Кайбышев О.А. Сверхпластичность промышленных сплавов. М.: Металлургия, 1984. – 264 с.
23. Васин Р.А., Еникеев Ф.У. Введение в механику сверхпластичности. Уфа: Гилем, 1998. – 280 с.
24. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. Superplasticity in Metals and Ceramics. Cambridge Univ. Press, 1997. – 287 p.
25. Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation / V.M. Segal, I.J. Beyerlein, C.N. Tome, V.N. Chuvil'deev, V.I. Kopylov. New York: Nova Science Pub. Inc., 2010. – 542 p.
26. Kremple E., Ho K. Inelastic Compressible and Incompressible, Isotropic, Small Strain Viscoplasticity Theory Based on Overstress (VBO) // Handbook of Materials Behavior Models. N.Y.: Academic Press, 2001. P. 336–348.
27. О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие / А.Ф. Никитенко, О.В. Соснин, Н.Г. Торшенинов, И.К. Шокало // ПМТФ. 1971. № 2. С. 118–122.
28. Lin Y.C., Chen X.-M. A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working // Materials and Design. 2011. Vol. 32. P. 1733–1759.
29. Flow stress equation of AZ31 magnesium alloy sheet during warm tensile deformation / Y.Q. Cheng, H. Zhang, Z.H. Chen, K.F. Xian //

- J. Mater. Process. Technol. 2008; Vol. 208. P. 29–34.
30. Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests // Mech. Time-Depend. Mater. 2007. Vol. 11. P. 159–172.
31. Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep Analysis with a Stress Range Dependent Constitutive Model // Arch. Appl. Mech. 2009. Vol. 79. P. 619–630.
32. Радченко В.П. Об одной структурной реологической модели нелинейно-упругого материала // Прикладная механика. 1990. Т. 26. № 6. С. 67–74.
33. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Анализ нелинейной обобщенной модели Максвелла // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2005. Вып. 38. С. 55–64.
34. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. О дрейфе упругой деформации для нелинейно-упругих материалов вследствие ползучести // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. Вып. 43. С. 99–105.
35. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Математическая модель ползучести микронеоднородного нелинейно-упругого материала // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 3. С. 157–163.
36. Радченко В.П., Андреева Е.А. О дрейфе и эффекте памяти нелинейно-упругой деформации вследствие ползучести для микронеоднородных материалов в условиях одноосного напряженного состояния // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. Вып. 2 (19). С. 72–77.
37. Хохлов А.В. Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 5. С. 187–245. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/840650.html> (дата обращения 14.06.2016).
38. Хохлов А.В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамп-деформировании и методики ее идентификации // Известия РАН. МТТ. 2017 (в печати).
39. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // Известия РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 147–166.
40. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // Известия РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 140–160.
41. Хохлов А.В. Кривые обратной ползучести в рамках линейной вязкоупругости и необходимые ограничения на функцию ползучести // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Вып. 75. № 4. С. 257–267.
42. Хохлов А.В. Характерные особенности семейств кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Вып. 77. № 2. С. 139–154.
43. Хохлов А.В. Кривые ползучести и релаксации нелинейного определяющего соотношения Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Вып. 78. № 4. С. 452–466.
44. Конструкционные полимеры / П.М. Огибалов, Н.Н. Малинин, В.П. Нетребко, Б.П. Кушкин. Кн. 1. М.: Изд-во МГУ, 1972. – 322 с.
45. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. – 304 с.
46. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. – 239 с.
47. Drozdov A.D. Mechanics of viscoelastic solids. N.-Y.: Wiley & Sons, 1998. – 484 p.
48. Brinson H.F., Brinson L.C. Polymer Engineering Science and Viscoelasticity. Springer Science & Business Media, 2008. – 446 p.
49. Christensen R.M. Mechanics of Composite Materials. New York: Dover Publications, 2012. – 384 p.
50. Bergstrom J.S. Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling. Elsevier, William Andrew: 2015. – 520 p.
51. Krempl E., Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers // International Journal of Plasticity. 2003. Vol. 19. P. 1069–1095.
52. McClung A.J.W., Ruggles-Wrenn M.B. The rate (time)-dependent mechanical behavior of the PMR-15 thermoset polymer at elevated temperature // Polymer Testing. 2008. Vol. 27. P. 908–914.
53. Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model / M. Kastner et al. // Mechanics of Materials. 2012. Vol. 52. P. 40–57.

54. Kim J.W., Medvedev G.A., Caruthers J.M. Nonlinear stress relaxation in an epoxy glass and its relationship to deformation induced mobility // *Polymer*. 2013. Vol. 54. No 15. P. 3949–3960.
55. Viscoelastic constitutive modelling of solid propellant with damage / K.-S. Yun, J.-B. Park, G.-D. Jung, S.-K. Youn // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 34. P. 118–127.
56. Kim J.W., Medvedev G.A., Caruthers J.M. The response of a glassy polymer in a loading-unloading deformation: the stress memory experiment // *Polymer*. 2013. Vol. 54, No 21. P. 5993–6002.
57. Lee W.-S., Lin C.-R. Deformation behavior and microstructural evolution of 7075-T6 aluminum alloy at cryogenic temperatures // *Cryogenics*. 2016. Vol. 79. P. 26–34.
58. Fung Y.C. Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues. New York: Springer-Verlag, 1993. – 568 p.
59. Lakes R.S. Viscoelastic Materials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 461 p.
60. Diani J., Fayolle B., Gilormini P. A review on the Mullins effect. *European Polymer Journal*. 2009. Vol. 45. P. 601–612.
61. MacHado G., Chagnon G., Favier D. Analysis of the isotropic models of the Mullins effect based on filled silicone rubber experimental results // *Mech. Mater.* 2010. Vol. 42. P. 841–851.
62. Fernandes V.A., De Focatiis D.S. The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber // *Polymer Testing*. 2014. Vol. 40. P. 124–132.
63. Logarithmic rate based elasto-viscoplastic cyclic constitutive model for soft biological tissues / Y. Zhu, G. Kang, C. Yu, L.H. Poh // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2016. Vol. 61 P. 397–409.
64. Мельшианов А.Ф. Исследование сопротивления упругопластическому деформированию некоторых конструкционных материалов при различных законах нагружения // *Известия АН СССР. МТТ*. 1977. № 3. С. 89–96.
65. Khan A.S., Farrokh B. Thermo-mechanical response of nylon 101 under uniaxial and multi-axial loadings: Part I, Experimental results over wide ranges of temperatures and strain rates // *International Journal of Plasticity*. 2006. Vol. 22. P. 1506–1529.
66. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep? // *International Journal of Plasticity*. 2011. Vol. 27. No 12. P. 1936–1958.
67. The constitutive responses of Ti-6.6Al-3.3Mo-1.8Zr-0.29Si alloy at high strain rates and elevated temperatures / J. Zhang, Y. Wang, X. Zan, Y. Wang // *Journal of Alloys and Compounds*. 2015. Vol. 647. P. 97–104.
68. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. – 592 с.

Материал поступил в редакцию 12.01.2017

**ХОХЛОВ
Андрей Владимирович**

E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru
Тел.: (495) 932-89-24

Кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории упругости и пластичности Института механики МГУ имени М.В. Ломоносова. Сфера научных интересов: механика деформируемого твердого тела, математическое моделирование, качественный анализ, идентификация и аттестация определяющих соотношений термовязкоупругопластичности и ползучести, длительная прочность, функциональный анализ. Автор 80 научных работ.