УДК 534.014.4

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАШЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А.С. Смирнов, Б.А. Смольников

В статье рассматриваются вопросы оптимального управления колебательным состоянием линейной механической системы с конечным числом степеней свободы. В качестве демпфирующего управления предлагается использовать коллинеарное управление, которое учитывает динамические особенности рассматриваемой системы и имитирует обобщенные силы инерции. Показано, что такое управление не нарушает форм свободных колебаний, а лишь снижает их амплитуды, что позволяет эффективно использовать его для гашения колебаний многомерных механических систем. Построенное управление содержит в своей структуре коэффициент усиления, наилучший выбор которого следует осуществлять из условия оптимизации процесса гашения. На основе интегрального и локального критериев качества определяются оптимальные значения этого коэффициента, различия между которыми не являются существенными. Полученные результаты позволяют оценить, какие параметры управления следует рекомендовать для практического использования. Проведенное исследование показывает, что для линейных систем существует единообразный оптимальный режим гашения их свободных колебаний посредством активного коллинеарного управления.

Ключевые слова: *коллинеарное управление, многомерная линейная механическая система, активное гашение колебаний, критерий оптимизации.*

OPTIMAL DAMPING OF FREE OSCILLATIONS IN LINEAR MECHANICAL SYSTEMS

A.S. Smirnov, B.A. Smolnikov

The problems of optimal control of the vibrational state of a linear conservative system with a finite number of degrees of freedom are discussed in the article. It is proposed to use collinear control as a damping control. It takes into account the dynamic features of the system and simulates general inertia forces. It is shown that such a control does not disturb the free oscillation forms, but only reduces their amplitudes. This makes it possible effectively to use the collinear control for damping the oscillations of multidimensional mechanical systems. The designed control contains in its structure a gain factor. Its best choice should be made at the condition of optimizing the damping. The optimal values of this coefficient are determined based on the integral and local quality criteria, the differences between them are not significant. The results obtained allow to estimate what control parameters should be recommended for practical use. The study shows that there is a uniform optimal mode of free oscillations damping for linear systems by means of active collinear control.

Keywords: *collinear control, multidimensional linear mechanical system, active oscillations damping, optimization criterion.*

Введение

Различным аспектам теории и практики подавления и ликвидации свободных колебаний уделялось большое внимание в литературе как в первые годы становления технической механики (на исходе XIX в.), так и в настоящее время, т.е. уже более 150 лет [1–3]. Конечно, за столь большой период развития этой ветви механики существенно изменились как конкретные цели этих исследований, так и расчетные методы, и технические устройства, применяемые в различных конструкциях. В первую очередь эти изменения коснулись характера демпфирующих сил, используемых для снижения амплитуд колебаний, а также способов реализации этих сил и управления ими. Так, если вплоть до середины XX в. в качестве тормозящих сил использовались преимущественно силы пассивного происхождения, создаваемые демпферами сухого или вязкого трения, то после становления новой научной дисциплины – теории и практики автоматического управления – все более заметную роль в разработке антивибрационных устройств стали играть активные методы гашения колебаний. Эти методы существенно повышают как быстродействие, так и качество процессов снижения колебательных амплитуд в крупногабаритных динамических системах, применяемых при строительстве морских сооружений, разнообразных наземных линий передач, мостовых и путепроводных конструкциях.

Целью настоящей статьи является построение режима оптимального активного гашения свободных колебаний на примере линейной многомерной системы, позволяющего достаточно гибко управлять этим процессом в условиях полноприводного воздействия на все степени свободы этой системы.

Свободное движение системы

Переходя к конкретной постановке задачи, рассмотрим консервативную механическую систему с n степенями свободы, совершающую колебательное движение. Как известно, при малых отклонениях от положения устойчивого равновесия кинетическую и потенциальную энергию этой системы можно представить в виде [4]

$$T=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}\,,\ \Pi=\frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{q}\,, \tag{1}$$

где $\mathbf{q}=[q_1,q_2,...,q_n]^{\mathrm{T}}$ – столбец обобщенных координат; $\dot{\mathbf{q}}$ – вектор обобщенных скоростей; $\mathbf{A}$ – матрица инерционных коэффициентов; $\mathbf{C}$ – матрица квазиупругих коэффициентов.

Подставляя (1) в уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}\,, \tag{2}$$

можно записать уравнения свободного движения системы в виде [5]

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\mathbf{q}=0\,, \tag{3}$$

где $\ddot{\mathbf{q}}$ – вектор обобщенных ускорений.

Будем искать решение системы (3) в виде $\mathbf{q}=\mathbf{U}e^{\lambda t}$. Тогда приходим к уравнению

$$(\mathbf{C}+\lambda^2\mathbf{A})\,\mathbf{U}=0\,, \tag{4}$$

где λ – собственные значения; $\mathbf{U}$ – собственные векторы.

Существование нетривиального решения уравнения (4) обеспечивается равенством нулю определителя

$$\det(\mathbf{C}+\lambda^2\mathbf{A})=0, \tag{5}$$

откуда находятся собственные значения задачи, являющиеся, очевидно, чисто мнимыми величинами $\lambda_{s0}=ik_{s0}$, где i – мнимая единица, k_{s0} – частоты свободных колебаний, а $s=\overline{1,n}$. Поскольку кратные корни частотного уравнения в практических задачах встречаются достаточно редко, то для простоты будем полагать, что среди корней уравнения (5) нет кратных [4]. Подставляя их в уравнение (4), определяем собственные формы колебаний $\mathbf{\Phi}_{(s)}$. В результате, решение уравнения (3) можно записать в компактном виде:

$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta}(t)\,,\ \theta_s(t)=U_s\sin(k_{s0}t+\alpha_s)\,,\ s=\overline{1,n}\,,$$

где $\mathbf{\Phi}=[\mathbf{\Phi}_{(1)}\,|\,\mathbf{\Phi}_{(2)}\,|\,...\,|\,\mathbf{\Phi}_{(n)}]$ – модальная матрица, т.е. матрица собственных форм; $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,...,\theta_n]^{\mathrm{T}}$ – столбец временных функций; U_s и α_s – константы, определяемые из начальных условий.

При этом, как известно, собственные формы между собой взаимно ортогональны с весами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$, т.е. имеют место соотношения [6]:

$$\mathbf{\Phi}_{(s)}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{\Phi}_{(p)}=0\,,\ \mathbf{\Phi}_{(s)}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_{(p)}=0\,, \tag{6}$$

если $s\neq p$. Собственные формы определяются с точностью до постоянного множителя, получаемого из условий нормировки:

$$\mathbf{\Phi}_{(s)}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{\Phi}_{(s)}=m_s\,,\ \mathbf{\Phi}_{(s)}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_{(s)}=m_s k_{s0}^2\,. \tag{7}$$

Выбор положительных нормировочных коэффициентов m_s может осуществляться произвольным образом, и на решение задачи этот выбор не влияет.

Построение закона управления

Обратимся теперь к построению демпфирующего управления, а именно – к формированию столбца управляющих воздействий $\mathbf{Q}=[Q_1,Q_2,...,Q_n]^{\mathrm{T}}$. Добавляя его в правую часть уравнений (2), приходим к матричному уравнению управляемого движения рассматриваемой системы

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\mathbf{q}=\mathbf{Q}\,, \tag{8}$$

из которого следует очевидное энергетическое соотношение

$$\dot{E}=\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\,, \tag{9}$$

где $E=T+\Pi$ – полная механическая энергия системы.

Очевидно, что для гашения колебаний в системе необходимо, чтобы всегда выполнялось условие $\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\leq 0$, обеспечивающее монотонное снижение механической энергии. Подчинить столбец $\mathbf{Q}$ этому соотношению можно различными способами, каждый из которых может иметь свои достоинства и недостатки. Поэтому здесь целесообразно ставить вопрос о формировании рационального управления, которое имело бы достаточно простую структуру, удобную для практической реализации, а затем находить наилучшие параметры такого управления [7]. Разумеется, при этом необходимо максимально использовать собственные динамические свойства рассматриваемой системы, т.е. ее кинетику, учитывая динамическое взаимодействие различных степеней свободы. Исходя из этого, можно сделать вывод, что для построения такого управления необходимо формировать управляющие воздействия в системе с помощью контуров обратной связи [8].

Следует подчеркнуть, что свободные движения механической системы, описываемые уравнением (3), можно рассматривать как ее естественные движения. Для снижения темпа этих движений разумно прикладывать управляющие воздействия против возникающих сил инерции, не изменяя при этом их общего характера [9]. Отсюда очевидно, что управляющие обобщенные силы по всем степеням свободы следует формировать так, чтобы они всегда находились в противофазе с обобщенными импульсами системы. Построенное таким образом управление можно назвать коллинеарным, если трактовать условие коллинеарности как требование пропорциональности столбца управляющих обобщенных сил $\mathbf{Q}$ столбцу обобщенных импульсов системы $\mathbf{K} = \partial T / \partial \dot{\mathbf{q}}$ [10]:

$$\mathbf{Q} = \gamma \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \gamma \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} , \qquad (10)$$

где γ – коэффициент усиления, который будем полагать постоянной величиной ($\gamma = \text{const}$).

Из соотношения (10) видно, что это управление основано на принципе обратной связи [11]. Также коллинеарное управление является кинетическим, поскольку оно будет имитировать силы инерции, возникающие в системе в процессе ее целенаправленного движения [12]. Необходимо обратить еще внимание на то, что построенное управление является полноприводным, поскольку число обобщенных управляющих сил полностью соответствует числу степеней свободы системы. В качестве приводов могут использоваться как электроприводы, так и прочие приводные устройства (например, гидроприводы или пневмоприводы).

Проанализируем свойства этого управления. Во-первых, из соотношений (1), (9) и (10) следует, что

$$\dot{E} = \gamma \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} = 2\gamma T , \qquad (11)$$

откуда ясно, что при $\gamma < 0$ правая часть этого соотношения не положительная, и коллинеарное управление в этом случае является тормозящим, непосредственно влияя на убывание уровня полной механической энергии системы. При этом соотношение (11) не раскрывает характера процесса снижения энергии (колебательный, апериодический или колебательно-апериодический). С целью выяснения этого характера вернемся к уравнению (8), которое с учетом (10) принимает вид

$$\mathbf{A}(\ddot{\mathbf{q}} - \gamma \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0 . \qquad (12)$$

Как и ранее, будем искать решение системы (12) в виде $\mathbf{q} = \mathbf{U} e^{\lambda t}$. В результате приходим к характеристическому уравнению

$$\det[\mathbf{C} + (\lambda^2 - \gamma\lambda)\mathbf{A}] = 0 . \qquad (13)$$

Сопоставляя определители (13) и (5), нетрудно установить, что собственные числа λ уравнения (12) тесно связаны с частотами колебаний k_{s0} консервативной системы, а именно, они удовлетворяют соотношениям:

$$\lambda_s^2 + 2\delta\lambda_s + k_{s0}^2 = 0 , \; \delta = -\frac{\gamma}{2} > 0 , \qquad (14)$$

причем собственные формы системы (12) остаются такими же, как в консервативной системе (3). Поэтому коллинеарное управление не только гасит колебания механической системы согласно соотношению (11), но и не нарушает при этом формы свободных колебаний, лишь снижая их амплитуды. Именно это и является главной особенностью такого управления.

Разрешая уравнения (14), находим:

$$\lambda_s = -\delta \pm i k_s , \; k_s^2 = k_{s0}^2 - \delta^2 , \qquad (15)$$

где величины k_s могут быть как вещественными, так и мнимыми.

Наконец, решения уравнений (12) окончательно можно записать в виде

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi} \boldsymbol{\theta}(t) ,$$

где функции времени примут вид:

$$\theta_s(t) = e^{-\delta t} (A_s e^{k_s t} + B_s e^{-k_s t}) . \qquad (16)$$

Отсюда следует, что если величина k_s является вещественной, то функция θ_s описывает затухающее колебательное движение. Если же

k_s является величиной мнимой, то θ_s описывает затухающее апериодическое движение.

Таким образом, предложенное коллинеарное управление обладает рядом качественных свойств, позволяющих эффективно использовать это управление для гашения колебаний многомерных механических систем.

Построенное управление содержит в своей структуре коэффициент усиления γ, который может назначаться исходя из каких-либо требований. Так, если γ достаточно мало, то собственные значения λ_s из соотношения (15) являются комплексно-сопряженными и имеют одинаковую вещественную часть $\delta = -\gamma/2$, поэтому затухание колебаний осуществляется достаточно медленно. Напротив, если γ достаточно велико, то все значения λ_s являются вещественными, причем значения со знаком «–» располагаются на корневом годографе далеко от мнимой оси, а значения со знаком «+» – близко к ней. Поэтому и в таком случае затухание колебаний будет весьма медленным. Это означает, что, как и в задаче оптимизации демпфирования линейного осциллятора [8], здесь существует некоторое компромиссное значение коэффициента γ, которое обеспечивает оптимальное гашение свободных колебаний системы. Для его определения следует сформулировать некоторый критерий качества.

Интегральный критерий оптимальности

Поскольку выбор коэффициента γ (или δ) естественно осуществлять из соображений наилучшего рассеивания механической энергии, то в качестве критерия оптимальности логично принять величину интеграла в следующем виде [8, 13]:

$$F = \int_0^\infty E(t)dt = \min_\delta , \qquad (17)$$

где кинетическая и потенциальная энергии, составляющие полную энергию, определяются выражениями (1).

Интегральные критерии качества такого рода широко используются в теории автоматического управления [14, 15]. Критерий (17) имеет простой геометрический смысл – его можно трактовать как меру площади под кривой энергии $E(t)$, а задача оптимизации будет сводиться к определению такого коэффициента δ, при котором эта площадь является минимальной (рис. 1). Более того, критерий (17) является энерговременным, поскольку он гармонично сочетает в себе как энергетические, так и временные характеристики. Поэтому этот критерий является вполне адекватным, и его можно использовать в решаемой задаче.

Переходя к вычислению интеграла (17), запишем столбец обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{\Phi}\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$, где согласно соотношению (16)

$$\dot{\theta}_s(t) = e^{-\delta t} \times \\ \times [A_s(-\delta + ik_s)e^{ik_s t} - B_s(\delta + ik_s)e^{-ik_s t}], \qquad (18)$$

и вычислим полную энергию системы $E = T + \Pi$.

Подставляя соотношения (16) и (18) в выражения (1) и пользуясь условиями (6) и (7), получим

$$E = \frac{1}{2}e^{-2\delta t}\sum_{s=1}^{n} m_s \varphi_s(t), \qquad (19)$$

где функции $\varphi_s(t)$ имеют следующий вид:

$$\varphi_s(t) = A_s^2 e^{2ik_s t}[(-\delta + ik_s)^2 + k_{s0}^2] + \\ + B_s^2 e^{-2ik_s t}[(\delta + ik_s)^2 + k_{s0}^2] + 4A_s B_s k_{s0}^2 . \qquad (20)$$

Подставляя выражение (19) с учетом соотношения (20) в выражение (17) и пользуясь равенствами

$$\int_0^\infty e^{-2(\delta \pm ik_s)t}dt = \frac{1}{2(\delta \pm ik_s)}, \quad \int_0^\infty e^{-2\delta t}dt = \frac{1}{2\delta},$$

нетрудно привести критерий к виду

$$F = \frac{1}{2\delta}\sum_{s=1}^{n} m_s[(A_s + B_s)^2\delta^2 + 2A_s B_s k_s^2]. \qquad (21)$$

Заметим, что именно комплексная форма представления решения (16) оказывается наиболее удобной при вычислении интеграла (17).

Для определения констант A_s и B_s следует обратиться к начальным условиям движения $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$, $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$:

$$\mathbf{q}_0 = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{\Phi}_{(s)}(A_s + B_s), \\ \dot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{\Phi}_{(s)}[(-\delta + ik_s)A_s - (\delta + ik_s)B_s]. \qquad (22)$$

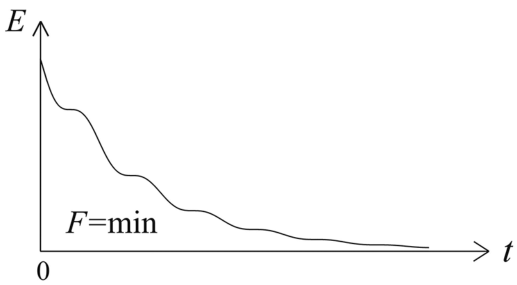

Рис. 1. Геометрический смысл интегрального критерия

Однако прежде, чем выражать эти константы через начальные условия, обратим внимание на один важный момент. Ясно, что в общем случае оптимальное значение коэффициента δ будет зависеть от начальных условий движения, что свойственно любому интегральному критерию качества. Однако, поскольку начальные условия далеко не всегда бывают точно определенными, то вполне естественно отыскать оптимальное значение δ для наихудшей совокупности начальных условий, т.е. найти такое значение δ, которое гарантирует наилучший результат в наихудшем случае.

С этой целью разложим столбцы начальных отклонений $\mathbf{q}_0$ и скоростей $\dot{\mathbf{q}}_0$ в ряды по формам свободных колебаний системы $\mathbf{\Phi}_{(s)}$:

$$\mathbf{q}_0 = \sum_{s=1}^{n} P_s \mathbf{\Phi}_{(s)}, \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{s=1}^{n} R_s \mathbf{\Phi}_{(s)}, \qquad (23)$$

где коэффициенты P_s и R_s в этих разложениях характеризуют вклад каждой формы в эти столбцы.

Очевидно, что по известным $\mathbf{q}_0$ и $\dot{\mathbf{q}}_0$ эти величины определяются единственным образом [4]. Для дальнейших рассуждений оказывается удобным представить каждую пару чисел (P_s, R_s / k_{s0}) (где деление на k_{s0} осуществляется из соображений размерности) на плоскости их полярными координатами, т.е. положить

$$P_s = r_s \cos\mu_s, \quad R_s = k_{s0}\, r_s \sin\mu_s, \qquad (24)$$

где, очевидно, $r_s \in [0, \infty)$, а $\mu_s \in [0, 2\pi)$.

Из сопоставления выражений (22), (23), (24) нетрудно получить уравнения для определения констант интегрирования A_s и B_s через введенные новые величины r_s и μ_s:

$$A_s + B_s = r_s \cos\mu_s,$$

$$(-\delta + ik_s)A_s - (\delta + ik_s)B_s = k_{s0}\, r_s \sin\mu_s.$$

Разрешая эти уравнения относительно A_s и B_s, находим:

$$A_s = -\frac{r_s}{2ik_s}[(\delta - ik_s)\cos\mu_s - k_{s0}\sin\mu_s],$$

$$B_s = \frac{r_s}{2ik_s}[(\delta + ik_s)\cos\mu_s - k_{s0}\sin\mu_s]. \qquad (25)$$

Вычислим теперь начальную энергию системы E_0, используя выражения (1), (6), (7), (23), (24):

$$E_0 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{q}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{q}_0 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s k_{s0}^2 r_s^2 = \frac{1}{2}R^2, \qquad (26)$$

где R – некоторый параметр. Отсюда видно, что уровень начальной энергии системы никак не зависит от введенных выше углов μ_s, а зависит только от величин r_s. Именно в этом и заключается удобство использования полярных координат. При этом изоповерхностями одинакового уровня начальной энергии в n-мерном пространстве координат r_s, соответствующими R = const, являются, как нетрудно понять из выражения (26), n-мерные эллипсоиды. Для последующего анализа целесообразно также осуществить масштабную замену переменных, введя вместо r_s величины ρ_s по формуле

$$r_s = \frac{R\rho_s}{\sqrt{m_s k_{s0}^2}}, \quad s = \overline{1, n}. \qquad (27)$$

Тогда поверхностью одинакового начального уровня энергии в пространстве координат ρ_s будет являться единичная сфера:

$$\sum_{s=1}^{n} \rho_s^2 = 1. \qquad (28)$$

Подставляя теперь выражения (25) в соотношение (21) и используя соотношения (26) и (27), получим:

$$F = \frac{E_0}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{\rho_s^2}{k_{s0}}\left[\frac{1}{\sigma_s} + \sigma_s + \sigma_s\cos 2\mu_s + \sin 2\mu_s\right],$$

$$\sigma_s = \frac{\delta}{k_{s0}}, \qquad (29)$$

где введены безразмерные величины σ_s, каждая из которых однозначно определяется через δ.

Поскольку предполагается, что частоты колебаний k_{s0} упорядочены по возрастанию, то $\sigma_i < \sigma_j$ при $i > j$. Стоящий в выражении (29) перед знаком суммы постоянный множитель, характеризующий начальный уровень энергии, очевидно, не влияет на оптимальное значение δ. Поэтому можно утверждать, что сама начальная энергия не играет роли, а имеет смысл лишь соотношение между начальными условиями. Отбрасывая этот множитель, мы тем самым полностью исключаем величину R из рассмотрения и приходим к исследованию на экстремум выражения

$$f = \sum_{s=1}^{n}\frac{\rho_s^2}{k_{s0}}\left[\frac{1}{\sigma_s} + \sigma_s + \sqrt{1+\sigma_s^2}\,\sin(2\mu_s + \beta_s)\right],$$

$$\mathrm{tg}\,\beta_s = \sigma_s. \qquad (30)$$

Перейдем теперь непосредственно к поиску оптимального значения для наихудшей совокупности начальных условий. Фактически здесь мы имеем дело с минимаксной задачей о нахождении точек экстремума функции $f(\delta,\mu_s,\rho_s)$, а именно – о нахождении $\min\limits_{\delta}\max\limits_{\mu_s,\rho_s} f$, принимая во внимание условие связи (28). Максимизируя сначала выражение (30) по μ_s, получим:

$$\underset{\mu_s}{f_{\max}}=\sum_{s=1}^{n}K_s\rho_s^2,\ K_s=\frac{1}{k_{s0}}\left(\frac{1}{\sigma_s}+\sigma_s+\sqrt{1+\sigma_s^2}\right). \quad (31)$$

Теперь необходимо максимизировать (31) по ρ_s, учитывая условие (28). Нетрудно показать, что при $i>j$

$$K_i=\frac{1}{k_{i0}}\left(\frac{1}{\sigma_i}+\sigma_i+\sqrt{1+\sigma_i^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\delta}+\frac{\sigma_i}{k_{i0}}+\frac{1}{k_{i0}}\sqrt{1+\sigma_i^2}<\frac{1}{\delta}+\frac{\sigma_j}{k_{j0}}+$$

$$+\frac{1}{k_{j0}}\sqrt{1+\sigma_j^2}=\frac{1}{k_{j0}}\left(\frac{1}{\sigma_j}+\sigma_j+\sqrt{1+\sigma_j^2}\right)=K_j.$$

Отсюда следует, что при увеличении s значение K_s убывает. Поэтому

$$\underset{\mu_s}{f_{\max}}=\sum_{s=1}^{n}K_s\rho_s^2\le K_1\sum_{s=1}^{n}\rho_s^2=K_1,$$

причем неравенство переходит в равенство при $\rho_1=1$, $\rho_s=0$, $s>1$, а во всех остальных точках имеет место строгое неравенство.

Тогда максимальное значение выражения (31) при условии связи (28) будет достигаться в том случае, когда $\rho_1=1$, $\rho_s=0$, $s>1$. Наконец, минимизируя по δ выражение

$$\underset{\mu_s,\rho_s}{f_{\max}}=\frac{1}{k_{10}}\left(\frac{1}{\sigma_1}+\sigma_1+\sqrt{1+\sigma_1^2}\right),$$

приходим к следующему выражению для его точки экстремума:

$$\sigma_{1*}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{\delta_*}{k_{10}}, \quad (31)$$

откуда уже находится искомое оптимальное значение $\delta_*\approx 0{,}7862k_{10}$, гарантирующее наилучший результат в смысле (17) при наихудшем выборе начальных условий.

Из выражения (31) следует, что для отыскания численного значения δ_* из всех частот достаточно знать лишь первую частоту консервативных колебаний k_{10}. Из соотношения (15) следует, что при значении δ_* все величины k_s вещественны, поэтому движение сохраняет колебательный характер по всем формам. Также из выражения (16) видно, что показатель убывающей экспоненты при каждой форме будет одинаков и равен δ_*, т.е. все формы гасятся однотипно.

Полученное оптимальное значение δ_* тесно связано со знаменитым «золотым сечением», которое часто возникает при решении самых разнообразных оптимизационных задач. В частности, оно также появляется и в упомянутой задаче оптимизации демпфирования линейного осциллятора, где использовался тот же критерий качества [8]. Поскольку для системы с одной степенью свободы коллинеарное гашение колебаний с математической точки зрения идентично действию вязкого трения, то обсуждаемая в настоящей статье проблема фактически является обобщением этой задачи на многомерный случай.

Наконец, зная δ_*, можно определить и наихудшие начальные условия: $\rho_1=1$, $\rho_s=0$, $s>1$, то есть они соответствуют первой форме, а соотношение между столбцами начальных отклонений и начальных скоростей дается выражениями: $\beta_1=\operatorname{arctg}\sigma_{1*}=38°10'$, $\mu_1^{(1)}=25°55'$, $\mu_1^{(2)}=\mu_1^{(1)}+180°$.

Локальный критерий оптимальности

В заключение рассмотрим еще один критерий выбора управляющего коэффициента, а именно – локальный критерий, часто используемый на практике и характеризующий степень устойчивости динамической системы. В отличие от интегрального критерия оптимальности (17), он не зависит от начальных условий движения [8]. Как известно, под степенью устойчивости линейной динамической системы принято считать вещественную часть корня характеристического уравнения этой системы, расположенного наиболее близко к мнимой оси плоскости корней, при условии, что все корни лежат слева от нее [13].

В рассматриваемой задаче эти корни имеют вид (15). При $\delta=0$ все корни лежат на мнимой оси, а с возрастанием δ они перемещаются по полуокружностям радиусов k_{s0}

$$(\operatorname{Re}\lambda_s)^2+(\operatorname{Im}\lambda_s)^2=k_{s0}^2,$$

пока не начнется последовательное слияние пар комплексно-сопряженных корней в кратные корни при $\delta=k_{s0}$. При последующем увеличении δ слившиеся корни начинают расходиться от этой точки по вещественной оси в разные стороны. Корневой годограф этого процесса изображен на рис. 2, откуда видно, что первое слияние корней произойдет при $\delta = k_{10}$.

При $\delta = k_{10}$ значение степени устойчивости определяется величиной δ, являющейся модулем вещественной части всех корней, которые в этом случае будут комплексно-сопряженными. При $\delta = k_{10}$ степень устойчивости будет определяться модулем корня $-\delta + \sqrt{\delta^2 - k_{10}^2}$, который лежит наиболее близко к мнимой оси. На рис. 3 приведен график зависимости $\Delta(\delta)$, где Δ – степень устойчивости.

Из него видно, что максимальная степень устойчивости достигается при $\delta = k_{10}$ и равна $\Delta_{\max} = k_{10}$. Однако то, что максимальная степень устойчивости достигается на кратном корне, приводит к некоторым трудностям. Во-первых, функция $\theta_1(t)$ в этом случае имеет вид

$$\theta_1(t) = e^{-\delta t}(\tilde{A}_1 t + \tilde{B}_1),$$

$$\tilde{A}_1 = r_1 k_{10}(\sin\mu_1 - \cos\mu_1), \; \tilde{B}_1 = r_1 \cos\mu_1, \quad (32)$$

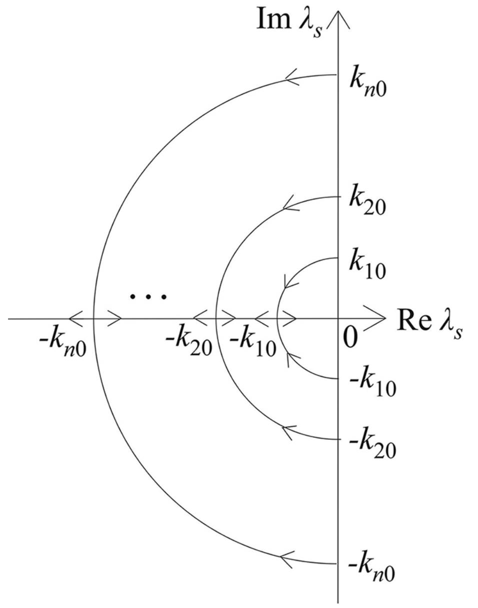

Рис. 2. Корневой годограф

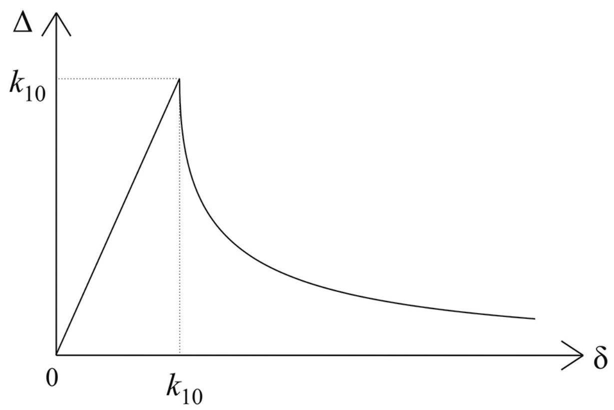

Рис. 3. Степень устойчивости

в чем легко убедиться, непосредственно осуществляя предельный переход в выражении (16) при $\delta \to k_{10}$, то есть при $k_1 \to 0$, и используя при этом выражения (25). Выражение (32) показывает, что функция $\theta_1(t)$ при малых временах является возрастающей, а убывает лишь с некоторого момента времени. Во-вторых, правая часть графика, изображенного на рис. 3, имеет в точке $\delta = k_{10}$ вертикальную касательную. Это означает, что даже малейшая ошибка в величине δ может привести к резкому снижению степени устойчивости.

Отсюда следует, что если руководствоваться критерием, основанным на степени устойчивости, то лучше всего выбирать значение управляющего коэффициента $\delta \approx 0{,}9k_{10}$, расположенное прямо на линейном участке графика. Отметим, что эта величина не слишком сильно расходится с полученным ранее оптимальным значением (31) по интегральному критерию.

Заключение

Проведенное исследование демонстрирует одно важное свойство линейных динамических систем – существование единообразного оптимального режима гашения их свободных колебаний посредством активного коллинеарного силового воздействия по всем степеням свободы. Фактически подавление всего спектра колебаний происходит аналогично тому, как это делается в системе с одной степенью свободы. Разумеется, для практической реализации такого подавления необходима разработка многоканального автоматического гасителя, который мог бы служить для гашения упругих колебаний.

Список литературы

1. *Магнус К.* Колебания: введение в исследование колебательных систем. М: Мир, 1982. – 304 с.
2. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. – 257 с.
3. *Коловский М.З.* Нелинейная теория виброзащитных систем. М.: Наука, 1966. – 320 с.
4. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
5. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. – 442 с.
6. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3.: под ред. *И.А. Биргера* и *Я.Г. Пановко.* М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.

7. *Меркин Д.Р., Смольников Б.А.* Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб: Изд-во СПбГУ, 2003. – 532 с.
8. *Смольников Б.А.* Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. – 232 с.
9. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб: Наука, 2003. – 208 с.
10. *Смольников Б.А., Юревич Е.И.* К проблеме биоморфного управления движениями роботов // Робототехника и техническая кибернетика. 2015. № 1(6). С. 17–20.
11. Управление мехатронными вибрационными установками: под ред. *И.И. Блехмана* и *А.Л. Фрадкова.* СПб: Наука, 2001. – 278 с.
12. *Смольников Б.А.* Проблемы механики в современной робототехнике // Робототехника и техническая кибернетика. 2016. № 1(10). С. 3–6.
13. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980. – 312 с.
14. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. 1: под ред. *В.В. Солодовникова*. М.: Машиностроение, 1967. – 770 с.
15. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.

Материал поступил в редакцию 21.04.2017

СМИРНОВ
Алексей Сергеевич
E-mail: **smirnov.alexey.1994@gmail.com**
Тел.: **(904) 616-35-61**

Студент кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, стажер-исследователь Института проблем машиноведения РАН. Сфера научных интересов: аналитическая механика, теория колебаний, динамика твердого тела, теория устойчивости, оптимизация в механике, волны в сплошных средах.

СМОЛЬНИКОВ
Борис Александрович
E-mail: **smolnikovba@yandex.ru**
Тел.: **(911) 736-37-64**

Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Сфера научных интересов: общая механика, биомеханика и робототехника, движение космических объектов, теория управления. Автор четырех книг и многочисленных статей по вопросам динамики твердого тела, робототехники и механики управляемых космических объектов.