

# УПРАВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПОВ БИОДИНАМИКИ

А.С. Смирнов, Б.А. Смольников

*В работе обсуждаются резонансные свойства биодинамики локомоционных движений животных и человека, и формулируются принципы синтеза отвечающих им биоморфных управлений мышечным аппаратом. Предлагается использовать подобные резонансные управления, трактуемые как коллинеарные управления, для возбуждения резонансных колебаний в линейных и нелинейных механических системах с произвольным числом колебательных степеней свободы. С помощью этого управления можно раскачивать систему по каждой из форм колебаний в отдельности вплоть до достаточно больших амплитуд. На примере простейшей колебательной системы – двойного математического маятника – дается численный расчет возбуждения и развития авторезонансного режима. На основе этих данных можно определить дрейф форм и частот колебаний при переходе из линейной зоны в нелинейную, который отчетливо проявляется в процессах локомоции живых организмов. Полученные результаты наглядно демонстрируют возможности управления как развитием авторезонансного режима, так и его стабилизацией или подавлением.*

**Ключевые слова:** биоморфное управление, авторезонансный режим, коллинеарное управление, нелинейная механическая система, двойной математический маятник.

## RESONANCE OSCILLATIONS CONTROL OF THE NON-LINEAR MECHANICAL SYSTEMS BASED ON THE PRINCIPLES OF BIODYNAMICS

A.S. Smirnov, B.A. Smolnikov

*In the paper, the resonance properties of the locomotion movement biodynamics of animals and humans have been discussed and the principles of the biomorphic controls synthesis of the muscular apparatus that correspond to them are formulated. It is proposed to use such resonance controls interpreted as collinear controls to excite resonance oscillations in linear and nonlinear mechanical systems with an arbitrary number of vibrational degrees of freedom. It's possible to sway the system for each of its oscillation forms separately by means of collinear control until sufficiently large amplitudes. The numerical calculation of the excitation and development of the resonance mode is given on the example of the simplest oscillatory system – a double mathematical pendulum. The drift of oscillations forms and frequencies is determined on the basis of this data during the transition from the linear zone to the nonlinear one, which is clearly manifested in the locomotion processes of living organisms. The obtained results demonstrate visually the possibility of controlling the development of the autoresonance mode and its stabilization or suppression.*

**Keywords:** biomorphic control, autoresonance mode, collinear control, nonlinear mechanical system, double mathematical pendulum.

## **Введение**

Возникшая в середине XX в. новая научно-техническая дисциплина «бионика»<sup>1</sup> сразу привлекла к себе большое внимание многих ученых и изобретателей как в СССР, так и за рубежом [1]. Объясняется это тем, что к этому времени уровень развития ряда различных областей науки, техники и технологии вплотную приблизился к тому, чтобы использовать в технических устройствах те или иные «патенты природы», т.е. принципы функционирования отдельных органов живых организмов [2]. И уже с первых лет своего существования общее русло бионики разделилось на два направления – бионику сенсорных систем и бионику систем локомоции и манипулирования. Последнее направление со временем слилось с давно существовавшей и интенсивно развивавшейся биомеханикой и уже приобрело устоявшийся статус самостоятельной дисциплины [3]. Ныне она охватывает широчайший комплекс вопросов математического моделирования разнообразных движений живых организмов типа андроидов, звероидов и т.п. и изучает возможности оптимизации этих движений по различным критериям.

Особый интерес при таком заимствовании представляет вопрос о структуре и характере биогенных (т.е. физиологических) управлений мышечным аппаратом животного, позволяющих ему совершать великолепные по своей красоте и эффективности прыжки, обгоны, бег, полет, плавание и прочие локомоционные маневры [4]. Чтобы «научить» подобным локомоциям андроиды и звероиды, необходимо построить отвечающие им биоподобные, т.е. биоморфные управления, в той или иной степени имитирующие биогенные управления живого организма [5]. Формирование одного из таких управлений и последующий анализ его свойств на примере механических систем и является основной целью настоящей статьи.

### **Биодинамические принципы движения живых организмов**

Для построения биоморфных управлений следует изучить не только особенности кинематики биолокомоций, но и их динамические свойства [6]. Проще всего эти свойства и особенности наблюдаются на примерах ходьбы или бега человека. В частности, в режиме спокойной

ходьбы легко заметить главную особенность – все конечности человека движутся с одним и тем же периодом, т.е. совершают одночастотное движение, присущее классическому механическому резонансу. При такой ходьбе частота резонанса практически совпадает с собственной частотой маятниковых качаний вытянутой ноги, ввиду чего для поддержания скорости ходьбы затрачивается минимальная физиологическая мощность мышечных усилий [7]. Приблизительный расчет показывает, что этому оптимальному режиму отвечает скорость ходьбы 3,2 км/ч (при длине ноги 90 см и ширине шага 70 см) [8]. По мере возрастания скорости ходьбы амплитуда качаний ног увеличивается и изменяется частота этих качаний, хотя практически сохраняется их форма (т.е. соотношение амплитуд движений бедра и голени). Чтобы этот режим оставался резонансным при дальнейшем увеличении скорости ходьбы, необходимо дополнительное напряжение мышц, причем не только ног, но и других конечностей.

Отсюда вытекает основной принцип биодинамики, гласящий, что всякая регулярная локомоция живого организма происходит в одночастотном режиме, при котором все степени свободы конечностей совершают движение с одинаковой частотой, обеспечивающей общую форму движения. Из этого требования следует еще один важный вывод: при использовании управляемого резонанса его ведущей характеристикой является не столько частота колебаний конечностей, сколько их конкретная форма, определяющая тип локомоции (ходьба, бег, прыжки и пр.).

Следует также помнить, что с ростом амплитуд колебаний конечностей любой биодинамической системы она, как правило, становится существенно нелинейной, и поэтому традиционное определение форм колебаний изменяет свой смысл. Тем не менее, наблюдения за локомоционной кинематикой животных показывают, что резонансные формы колебаний качественно сохраняются вплоть до углов поворота конечностей на 90° и более без возникновения других форм [9]. Этот вывод представляет интерес и для теории нелинейных колебаний механических систем, где также можно ставить вопрос о существовании и нахождении режимов управляемого (т.е. дрейфующего) резонанса, представляющего практический интерес.

<sup>1</sup> Термин впервые был использован 13 сентября 1960 г. на научном симпозиуме в г. Дайтоне (США), там же был провозглашен и основной лозунг новой дисциплины: «живые прототипы – ключ к новой технике».

### Авторезонансный разгон

Естественно, что для поддержания или развития такого биодинамического резонанса необходимо синхронное и синфазное управление всем мышечным аппаратом животного, что обеспечивается, очевидно, четким функционированием контуров обратной связи. Именно эти контуры способствуют движению конечностей в режиме авторезонанса, т.е. резонанса с обратной связью. Этот термин был впервые введен в научный лексикон А.А. Андроновым в 1937 г. (наряду с термином «автоколебания») [10], однако долгое время оставался почти незамеченным.

Чтобы уточнить смысл термина «авторезонанс», дадим его развернутое объяснение: авторезонанс – это такой режим вынужденного движения динамической системы, когда локальные движения по всем ее степеням свободы происходят с одной частотой, которая может дрейфовать при изменении амплитуд колебаний. При этом вынуждающие силы, действующие по всем степеням свободы благодаря контуру обратной связи, увеличивают уровень механической энергии системы [11]. Следует отметить, что обычно используемые в литературе термины «резонанс» и «резонансная частота» (когда частота возбуждения не корректируется контуром обратной связи) пригодны лишь для описания линейных (т.е. малых) колебаний системы [12]. При этом термин «авторезонанс» адекватно характеризует режим колебаний как в линейной, так и в нелинейной области, т.е. при больших амплитудах. Поэтому именно этот термин описывает истинный резонанс при любых амплитудах.

Активное изучение задач динамики машин, связанных с авторезонансным разгоном, началось в последние десятилетия XX в. в Институте проблем машиноведения РАН под руководством А.Л. Фрадкова [13]. Предложенный им метод управляемого возбуждения колебаний в нелинейных динамических системах (метод скоростного градиента) [14] породил целый ряд теоретических и экспериментальных исследований по различным аспектам этой проблемы, которые подытожены в работе [15]. Настоящая работа относится к этому кругу задач теории нелинейных колебаний, хотя и основывается на несколько иных принципах построения управляющих воздействий. Эти принципы, в свою очередь, базируются на уже упоминавшихся резонансных свойствах разгонных режимов движения в нелинейной биодинамике бега жи-

вотных и человека, и они позволяют сформировать биоморфные законы управления, близкие к резонансным.

### Построение биоморфного управления

Прежде чем перейти к построению адекватного биоморфного управления, подчеркнем его качественные свойства, которые диктуются вышеизложенными принципами биодинамики. Главное из этих свойств заключается в том, что для выполнения любой энергоемкой локомоции животное выбирает некоторую форму движения (например, у лошади это галоп, иноходь, тропот и др.) и отвечающую ей частоту, после чего развивает только ее, не затрачивая энергию на другие формы. Ясно, что и биоморфное управление должно позволять такое выделение одночастотного, т.е. авторезонансного режима, обладающего, как это следует из биодинамики, высокими оптимизационными свойствами (минимизируя затраты энергии). Также очевидно, что такое управление должно быть кинетическим, т.е. учитывающим динамические особенности рассматриваемой системы, а также ее нелинейные характеристики [16].

В качестве биоморфного управления предлагается использовать так называемое коллинеарное управление [17]. Основная идея коллинеарного управления состоит в том, чтобы в полноприводной системе (в которой все степени свободы снабжены своими приводами) строить столбец управляющих воздействий  $Q$  пропорционально столбцу обобщенных импульсов  $\partial T / \partial \dot{q}$ , где  $T$  – кинетическая энергия системы, а  $\dot{q}$  – столбец ее обобщенных скоростей. Физически это означает, что управляющие силы действуют «в унисон» с силами инерции, возникающими на данном приводе [13].

Важной особенностью коллинеарного управления является то, что оно является оптимальным по времени разгонным или тормозным управлением, так как непосредственно влияет на возрастание или убывание уровня полной механической энергии системы. В самом деле, уравнение управляемого движения приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + \gamma \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – коэффициент усиления, который будем полагать постоянным, т.е.  $\gamma = \text{const}$ , а  $\Pi$  – потенциальная энергия системы. Будем считать, что кинетическая энергия системы есть ква-

дратичная форма обобщенных скоростей с матрицей  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ , а потенциальная энергия зависит только от обобщенных координат [18], то есть

$$T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad \Pi = \Pi(\mathbf{q}).$$

Умножая в этом случае уравнение (1) на строку  $\dot{\mathbf{q}}^T$  слева, после несложных преобразований получаем:

$$\dot{E} = 2\gamma T, \quad (2)$$

где  $E = T + \Pi$  – полная механическая энергия системы. Из энергетического соотношения (2) следует, что при  $\gamma > 0$  происходит разгон системы, а при  $\gamma < 0$  – ее торможение. Случай  $\gamma = 0$  отвечает консервативному движению, когда управляющие воздействия в системе отсутствуют.

### Управление линейным резонансом

Обращаясь к анализу резонансных режимов в линейной системе с  $n$  степенями свободы, выпишем традиционные выражения для ее кинетической  $T(\dot{\mathbf{q}})$  и потенциальной  $\Pi(\mathbf{q})$  энергий при малых колебаниях [19]:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}_0 \dot{\mathbf{q}}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{q}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{C}_0$  – симметричные квадратные матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов соответственно, а  $\mathbf{q}$  и  $\dot{\mathbf{q}}$  – столбцы обобщенных координат и скоростей. Подставляя выражения (3) в уравнение (1), приходим к матричному уравнению управляемого движения:

$$\mathbf{A}_0(\ddot{\mathbf{q}} - \gamma \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}_0 \mathbf{q} = 0. \quad (4)$$

При  $\gamma = 0$  оно описывает консервативное движение системы и имеет вид

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \mathbf{q} = 0, \quad (5)$$

для которого характеристическое уравнение есть

$$\det(\mathbf{A}_0 p^2 + \mathbf{C}_0) = 0, \quad (6)$$

где  $p$  – собственные значения системы (5). Как известно из работы [20], оно имеет чисто мнимые корни  $p_s = \pm i k_{s0}$ , где  $k_{s0}$ ,  $s = 1, n$  – частоты свободных колебаний, упорядоченные по возрастанию, а каждой частоте соответствует своя форма свободных колебаний  $\Phi_{(s)}$ . Общее решение системы (5) тогда может быть записано в виде:

$$\mathbf{q} = \sum_{s=1}^n A_s \Phi_{(s)} \cos(k_{s0} t + \alpha_s), \quad (7)$$

где величины  $A_s$  и  $\alpha_s$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий движения  $\mathbf{q}_0$  и  $\dot{\mathbf{q}}_0$ .

Возвращаясь к уравнению (4), выпишем для него характеристическое уравнение

$$\det[\mathbf{A}_0(\lambda^2 - \gamma\lambda) + \mathbf{C}_0] = 0, \quad (8)$$

где  $\lambda$  – собственные значения системы (4). Сопоставляя его с уравнением (6), нетрудно видеть, что они отличаются только заменой  $p^2$  на  $\lambda^2 - \gamma\lambda$ . Поэтому решения уравнения (8) будут удовлетворять условиям

$$\lambda^2 - \gamma\lambda + k_{s0}^2 = 0,$$

откуда легко найти и значения  $\lambda$ :

$$\lambda_s = \delta \pm i k_s, \quad \delta = \gamma/2, \quad k_s = \sqrt{k_{s0}^2 - \delta^2}. \quad (9)$$

Отсюда также следует, что собственные формы управляемой (т.е. неконсервативной) системы будут совпадать с формами консервативной системы. Видно, что при достаточно небольших значениях величины  $\delta$ , когда  $\delta < k_{10}$ , все значения  $k_s$  вещественны. Общее решение для уравнения (4) в этом случае можно записать в виде:

$$\mathbf{q} = \sum_{s=1}^n A_s e^{\delta t} \Phi_{(s)} \cos(k_s t + \alpha_s),$$

и оно отличается от консервативного варианта соотношения (7) лишь дополнительным множителем  $e^{\delta t}$  и тем, что частоты колебаний в этом случае равны  $k_s$ .

Завершая на этом разговор о линейном резонансе, заключаем, что в силу его коллинеарного возбуждения он сохраняет свою форму. Это значит, что каждое главное колебание может возбуждаться и наращиваться, либо гаситься независимо друг от друга, а при отключении управляющего воздействия будет сохранять достигнутую форму и амплитуду.

### Двойной математический маятник

В качестве конкретной иллюстрации всего сказанного ранее рассмотрим развитие резонансных колебаний на примере плоского двойного математического маятника (рис. 1) с полноприводным управлением, когда управляющие моменты действуют в обоих его шарнирах. Эта система имеет две формы и две частоты колебаний, а простейшим жизненным примером, который можно сопоставить ей, является движение ноги человека. Так, движение ноги человека на участке ее переноса

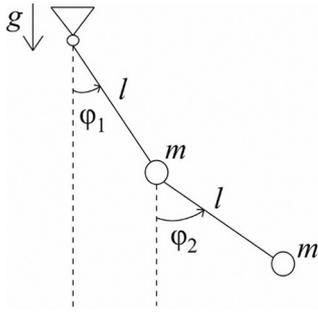


Рис. 1. Двойной маятник

происходит в режиме первой, нижней формы, а вторая, высшая форма возникает при переходе от ходьбы к бегу. При этом каждая форма может воспроизводиться независимо от другой, а мышечный аппарат может поддерживать, тормозить или раскачивать эту форму [12].

Будем использовать простейшую схему маятника, состоящего из двух идентичных звеньев длиной  $l$  с концевыми массами  $m$  и находящегося в поле силы тяжести (где  $g$  – ее ускорение) [21]. В качестве обобщенных координат выберем абсолютные углы отклонения звеньев  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  от вертикали. Объясняется это тем, что в таком случае кинетическая и потенциальная энергии имеют более простой вид:

$$T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} ml^2 [2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (10)$$

$$\Pi = \Pi(\mathbf{q}) = mgl[2(1 - \cos \varphi_1) + (1 - \cos \varphi_2)], \quad (11)$$

где  $\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2]^T$  – столбец обобщенных координат системы, а симметричная матрица  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  есть

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 1 \end{bmatrix}.$$

Подставляя выражения (10) и (11) в уравнение (1), приходим к уравнениям управляемого движения двойного маятника в матричной форме:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}} - \gamma\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{C}(\mathbf{q}) = 0, \quad (12)$$

где обозначено  $\dot{\mathbf{q}}^2 = [\dot{\varphi}_1^2, \dot{\varphi}_2^2]^T$ , а кососимметричная матрица  $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$  и столбец  $\mathbf{C}$  имеют вид

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = ml^2 \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = mgl \begin{bmatrix} 2 \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Полученная нелинейная математическая модель управляемого движения двойного маятника (12) и является основным объектом дальнейшего анализа. Ее линейная аппроксимация (при достаточно малых углах  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ), очевидно, будет иметь вид (4), где матрицы  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{C}_0$  есть

$$\mathbf{A}_0 = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя эти матрицы, легко найти частоты и формы консервативной системы (5), отвечающей  $\gamma = 0$  [22]:

$$k_{10} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}k, \quad k_{20} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}k$$

есть собственные частоты колебаний, где принято обозначение  $k = \sqrt{g/l}$  – частота малых колебаний обычного математического маятника длиной  $l$ , а столбцы

$$\Phi_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

есть собственные формы колебаний, отвечающие частотам  $k_{10}$  и  $k_{20}$ . Эти формы характеризуют отношения амплитудных значений  $A_2$  и  $A_1$  углов  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$  соответственно [23], которые можно задать параметром  $\mu_0 = A_2 / A_1$ , причем для первой формы будем обозначать это отношение как  $\mu_{10}$ , а для второй –  $\mu_{20}$ . Из выражений (13) следует, что  $\mu_{10} = \sqrt{2}$ , а  $\mu_{20} = -\sqrt{2}$ .

Как было показано выше, в управляемой системе при малых колебаниях будут сохраняться формы консервативной системы (13), поэтому можно раскачивать маятник как по первой, так и по второй форме колебаний в отдельности. Однако столь гибкое управление возможно лишь в линейной системе. За пределами этой зоны нелинейные слагаемые, входящие в уравнение (12), уже в принципе не допускают существования строго одночастотных колебаний. Тем не менее, посредством коллинеарного возбуждения можно и в слабо-нелинейных зонах выявить существование квазиодночастотных колебаний, а, следовательно, и авторезонансных режимов их разгона и торможения.

### Компьютерное моделирование резонансного разгона

Исследование нелинейных режимов разгона двойного маятника будем проводить посредством численного интегрирования уравнений управляемого движения (12). В рассматриваемой двухстепенной системе, очевидно, суще-

ствуют два сценария авторезонансных режимов. Для вхождения системы в режим первого или второго резонанса следует задать достаточно малые значения начальных углов отклонения и скоростей по соответствующей форме. Кстати, именно так поступает бегун перед стартом или тигр перед прыжком [12]. Начавшийся авторезонансный разгон системы будет происходить строго по избранной форме движения.

На рис. 2, 3 приведены графики зависимости углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (в градусах) от времени  $t$  (в се-

кундах), которые представляют собой результаты численного интегрирования уравнений (12) при малых начальных условиях, отвечающих либо первой, либо второй главной форме линейных колебаний рассматриваемой динамической системы. На них отчетливо выделяются разгонные режимы (когда задается  $\gamma > 0$ ), консервативные режимы (когда управление отключается, т.е. полагается  $\gamma = 0$ ) и тормозные режимы (когда задается  $\gamma < 0$ ). Из графиков следует, что значения углов отклонения на консервативных

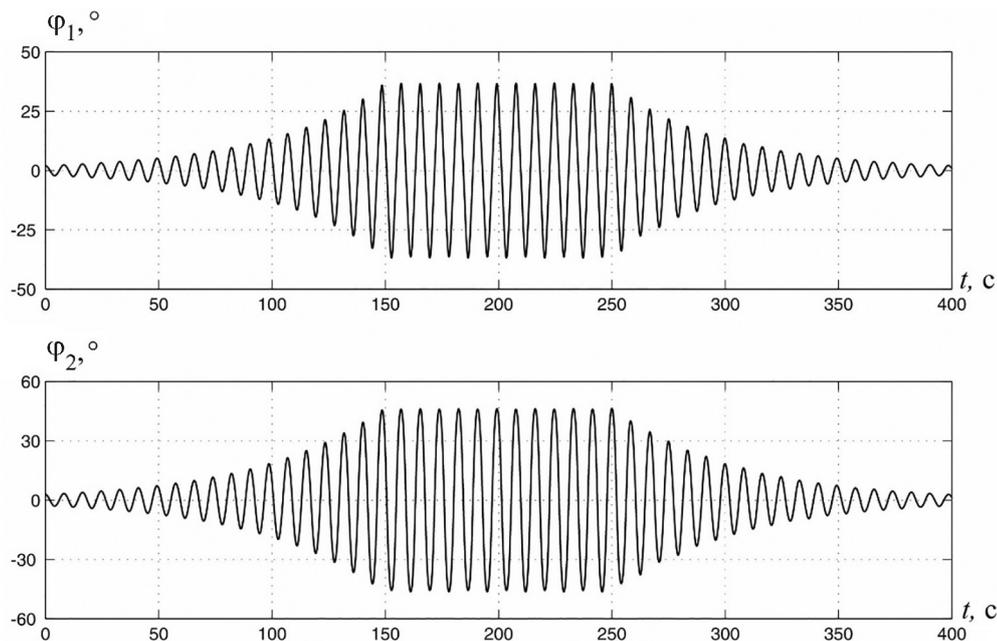


Рис. 2. Управление первой формой колебаний двойного маятника

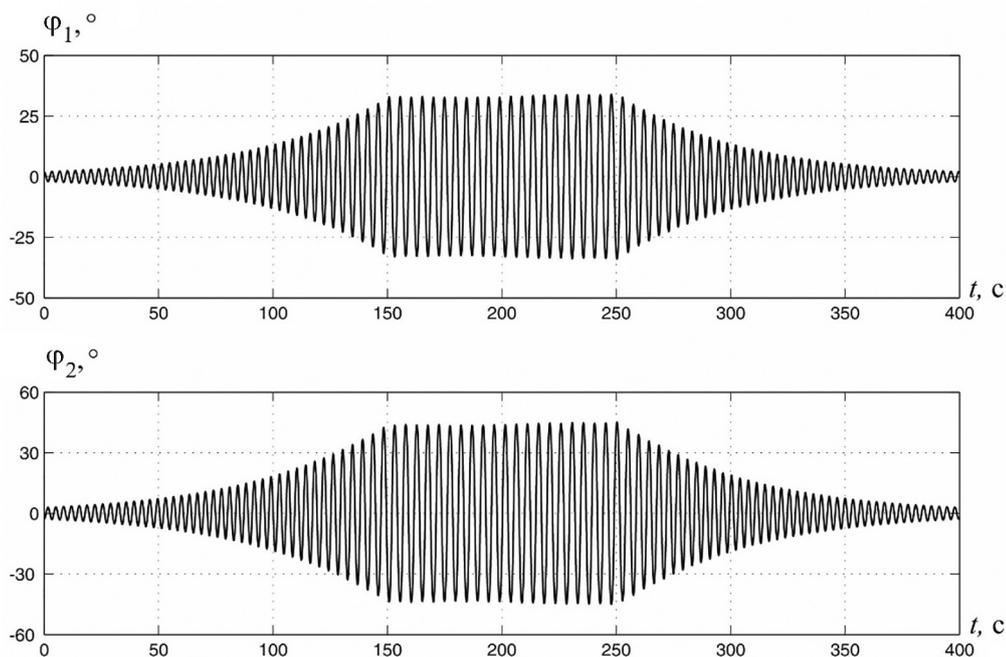


Рис. 3. Управление второй формой колебаний двойного маятника

режимах являются достаточно большими, поэтому они являются нелинейными. Тем не менее колебания сохраняют практически одночастотный, т.е. регулярный характер, хотя их форма и частота отличны от того, что было в линейной системе. Поэтому эти колебания можно использовать в конкретных практических целях.

Для исследований представляет интерес оценка того, как дрейфует каждая форма и частота колебаний при переходе из линейной области в нелинейную. Отличие нелинейной формы от начальной линейной формы состоит в том, что она, как и частота, изменяется с изменением амплитуды.

Наглядно этот процесс можно представить в виде графиков амплитудно-частотных характеристик для рассмотренного двойного маятника, изображенных на рис. 4. Для их построения систему раскачивают коллинеарным управлением по каждой из форм колебаний до некоторых амплитуд, после чего отключают управление и определяют частоты нелинейных колебаний  $k_1$  и  $k_2$  и амплитуды колебаний звеньев  $A_1$  и  $A_2$ . По оси абсцисс на этих графиках откладывается амплитуда колебаний первого звена (в градусах), а по оси ординат – отношение частот колебаний  $k_1$  и  $k_2$  к соответствующим частотам колебаний линейной консервативной системы  $k_{10}$  и  $k_{20}$ .

Как и следовало ожидать, в каждом из этих случаев частота колебаний при увеличении

амплитуды уменьшается, как это происходит и у обычного математического маятника [18]. Однако при разгоне двойного маятника по второй форме частота колебаний снижается более резко, чем при разгоне по первой форме, где она уменьшается менее заметно. Так, при амплитуде колебаний  $A_1 = 15^\circ$  относительное изменение частоты  $k_1$  по сравнению с  $k_{10}$  составляет всего 0,6 %, тогда как аналогичное изменение  $k_2$  по сравнению с  $k_{20}$  составляет уже 10,3 %. При амплитуде же колебаний  $A_1 = 45^\circ$  эти изменения еще более различаются между собой – они равны 4 % и 39 % соответственно. Отсюда можно сделать вывод, что при разгоне по второй форме линейная модель применима лишь при совсем малых амплитудах, тогда как для первой формы ее можно использовать в достаточно широком диапазоне амплитуд колебаний.

Что же касается дрейфа форм колебаний рассматриваемой механической системы, то качественное представление об их развитии дают зависимости отношения амплитуд колебаний звеньев  $\mu = A_2 / A_1$  от амплитуды колебаний первого звена  $A_1$  при разгоне по каждой из форм, причем для первой формы будем обозначать это отношение как  $\mu_1$ , а для второй формы –  $\mu_2$ . Графики этих зависимостей приведены на рис. 5, где для наглядности величины  $\mu_1$  и  $\mu_2$  отнесены к соответствующим величинам в линейном варианте  $\mu_{10}$  и  $\mu_{20}$ .

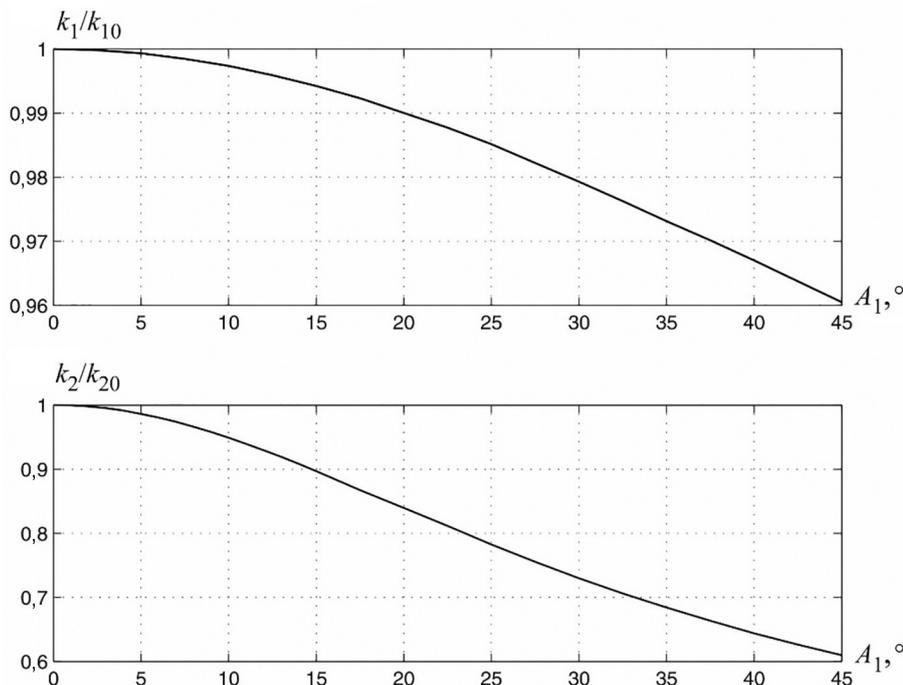


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика двойного маятника

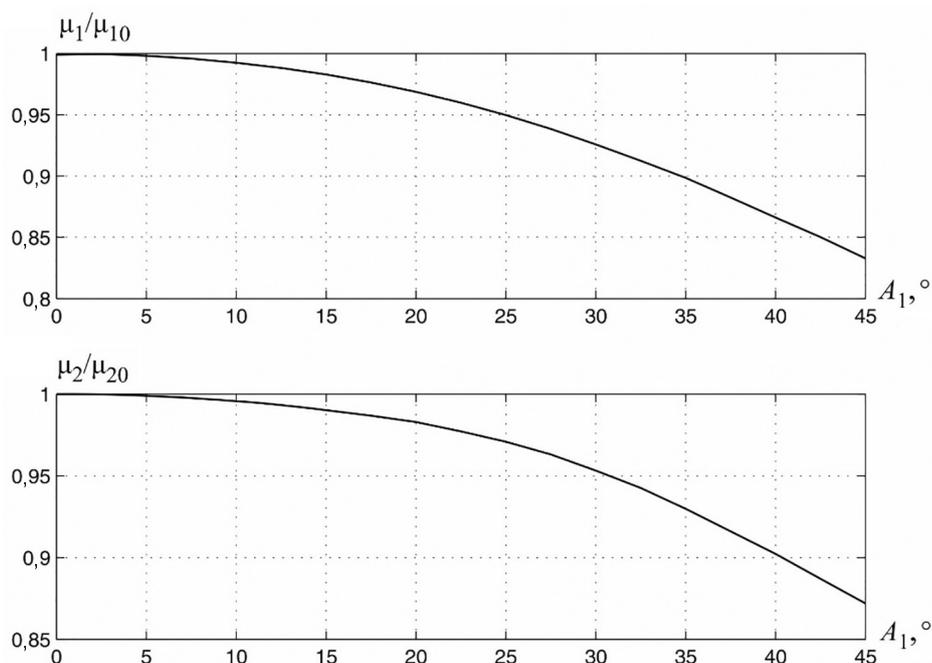


Рис. 5. Отношение амплитуд колебаний звеньев двойного маятника

Из этих графиков следует, что в каждом из случаев отношение амплитуд колебаний звеньев маятника с ростом амплитуд уменьшается, демонстрируя постепенное изменение формы колебаний. В отличие от частот колебаний здесь не наблюдается принципиальных различий между первой и второй формами. Так, при амплитуде колебаний  $A_1 = 15^\circ$  относительное изменение значения  $\mu_1$  по сравнению с  $\mu_{10}$  составляет 1,7 %, а аналогичное изменение  $\mu_2$  по сравнению с  $\mu_{20}$  составляет 1 %. При амплитуде же колебаний  $A_1 = 45^\circ$  эти изменения будут 16,7 % и 12,8 % соответственно. Поэтому можно заключить, что как первая, так и вторая форма колебаний рассматриваемой механической системы изменяются с увеличением амплитуд достаточно медленно, как это и происходит при движении ноги человека.

### Заключение

Рассмотренный в статье пример исследования авторезонансных режимов в простейшей нелинейной динамической системе с двумя степенями свободы, несмотря на свою относительную простоту, позволил установить целый ряд качественных особенностей процесса авторезонансного разгона под действием так называемого коллинеарного управления. В частности, это управление позволяет «заглянуть» глубоко в нелинейную зону и оценить в ней дрейф частот и форм нелинейного авторезонанса, отчетливо возникающий в процессах локомо-

ции живых организмов. Поэтому коллинеарное управление фактически является и биоморфным управлением, имитирующим динамические усилия в мышечном аппарате животных и человека. Это позволяет рекомендовать использование такого управления при разработке локомоторных устройств андроидов и звероидов, предназначенных для быстроходных локомоций.

### Список литературы

1. Крайзмер Л.П., Сочивко В.П. Бионика. М.: Энергия, 1968. – 112 с.
2. Парин В.В., Баевский Р.М. Кибернетика в медицине и физиологии. М.: Медгиз, 1963. – 119 с.
3. Мартека В. Бионика. М.: Мир, 1967. – 145 с.
4. Игнатова Е.И., Смольников Б.А., Юревич Е.И. Биомеханика в робототехнике // Труды конференции «50 лет развития кибернетики». СПб, 1999. С. 109–110.
5. Смольников Б.А. О биоморфном управлении движениями роботов // Труды 7-й научно-технической конференции «Экстремальная робототехника». СПб, 1996. С. 211–215.
6. Белецкий В.В. Двухногая ходьба. М.: «Наука», 1984. – 288 с.
7. Смольников Б.А. Проблемы механики в современной робототехнике // Робототехника и техническая кибернетика. 2016. № 1 (10). С. 3–6.
8. Бионика: Биологические аспекты: под общ. ред. Л.В. Решодько. Киев: Вища школа, 1978. – 304 с.

9. Смольников Б.А., Юревич Е.И. К проблеме биоморфного управления движениями роботов // Робототехника и техническая кибернетика. 2015. № 1 (6). С. 17–20.
10. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: «Наука», 1981. – 918 с.
11. Управление мехатронными вибрационными установками: под ред. И.И. Блехмана и А.Л. Фрадкова. СПб: Наука, 2001. – 278 с.
12. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. – 442 с.
13. Управление в физико-технических системах: под ред. А.Л. Фрадкова. СПб: Наука, 2004. – 272 с.
14. Фрадков А.Л. Схема скоростного градиента в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика, 1979. № 9. С. 90–101.
15. Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб: «Наука», 2003. – 208 с.
16. Смольников Б.А. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. – 232 с.
17. Меркин Д.Р., Смольников Б.А. Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб: изд-во СПбГУ, 2003. – 534 с.
18. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М., Ижевск: Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 591 с.
19. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
20. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3: под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.
21. Вильке В.Г. Теоретическая механика. СПб: Лань, 2003. – 304 с.
22. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 2: Динамика. М.: Наука, 1979. – 544 с.
23. Голубева О.В. Теоретическая механика. М.: Высшая школа, 1968. – 487 с.

Материал поступил в редакцию 28.07.2017

**СМИРНОВ  
Алексей Сергеевич**

E-mail: [smirnov.alexey.1994@gmail.com](mailto:smirnov.alexey.1994@gmail.com)  
Тел.: (812) 552-77-78

Студент кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, стажер-исследователь Института проблем машиноведения РАН. Сфера научных интересов: аналитическая механика, теория колебаний, динамика твердого тела, теория устойчивости, оптимизация в механике, волны в сплошных средах.

**СМОЛЬНИКОВ  
Борис Александрович**

E-mail: [smolnikovba@yandex.ru](mailto:smolnikovba@yandex.ru)  
Тел.: (812) 552-77-78

Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Сфера научных интересов: общая механика, биомеханика и робототехника, движение космических объектов, теория управления. Автор четырех книг и многочисленных статей по вопросам динамики твердого тела, робототехники и механики управляемых космических объектов.